

УДК 517.946.8

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. БИЦАДЗЕ

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В работах ^(1, 2) были построены три класса решений уравнения гравитационного поля

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{2(z+\bar{z})} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{2}{w+\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (1')$$

предложенного Р. Мейнхардтом.

Для описания осесимметрического гравитационного поля Ф. Эрнст ⁽³⁾ получил уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_0 \xi_0^* - 1}{x^2 - y^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 1) \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (1 - y^2) \frac{\partial \xi_0}{\partial y} \right] = \\ & = \frac{2\xi_0^*}{x^2 - y^2} \left[(x^2 - 1) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} \right)^2 + (1 - y^2) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\xi_0(x, y) = u(x, y) + iu_1(x, y)$ — искомый комплексный потенциал, величина ξ_0^* комплексно сопряжена с ξ_0 , а x, y — координаты вытянутого сфероида. Он же указал некоторые классы решений этого уравнения.

В настоящей заметке предлагается простой способ построения классов решений уравнения (1).

В обозначениях

$$w^*(z) = u(x, y) + iu_1(x, y), \quad \overline{w^*(z)} = u(x, y) - iu_1(x, y)$$

в результате замены независимых переменных

$$z = \sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)} + ixy, \quad \bar{z} = \sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)} - ixy,$$

учитывая то обстоятельство, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \left(\sqrt{\frac{1 - y^2}{x^2 - 1}} x + iy \right) \frac{\partial}{\partial z} + \left(\sqrt{\frac{1 - y^2}{x^2 - 1}} x - iy \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \left(-\sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}} y + ix \right) \frac{\partial}{\partial z} - \left(\sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 - y^2}} y + ix \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \\ & \frac{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}}{x^2 - y^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{i}{x^2 - y^2} \left[x(1 - y^2) \frac{\partial}{\partial y} + y(x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \\ & \frac{\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}}{x^2 - y^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \\ & - \frac{i}{x^2 - y^2} \left[x(1 - y^2) \frac{\partial}{\partial y} + y(x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x^2-y^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2-1) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (1-y^2) \frac{\partial}{\partial y} \right] = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{2}{z+\bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),$$

$$\frac{1}{x^2-y^2} \left[(x^2-1) \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} \right)^2 + (1-y^2) \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] = 4 \frac{\partial w^*}{\partial z} \frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}},$$

уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{2(z+\bar{z})} \left(\frac{\partial w^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{2\bar{w}^*}{w^* \bar{w}^* - 1} \frac{\partial w^*}{\partial z} \frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2)$$

Будем искать решение w^* уравнения (2) в виде

$$w^* = \varphi(v), \quad (3)$$

где φ — пока еще неизвестная аналитическая функция действительного переменного v .

Подставляя выражение (3) для функции w^* в уравнение (2), получаем

$$\frac{d\varphi}{dv} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{2(z+\bar{z})} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{d^2 \varphi}{dv^2} - \frac{2\bar{\varphi}}{\varphi \bar{\varphi} - 1} \left(\frac{d\varphi}{dv} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (4)$$

Из равенства (4) следует, что если функции $\varphi(v)$ и $v(z)$ являются решениями уравнений

$$\frac{d^2 \varphi}{dv^2} - \frac{2\bar{\varphi}}{\varphi \bar{\varphi} - 1} \left(\frac{d\varphi}{dv} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{2(z+\bar{z})} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \quad (6)$$

соответственно, то функция $w^* = \varphi(v)$ будет решением уравнения (2).

Равенство (5) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно действительной и мнимой частей функции $\varphi(v)$.

Если $|\varphi| \neq 1$ при фиксированном значении v_0 переменного v , то в окрестности v_0 решения уравнения (5) существуют и их можно строить в виде степенного ряда

$$\varphi(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (v-v_0)^k,$$

где a_0 и a_1 — произвольные комплексные числа, а при $n=0, 1$,

$$(n+1)(n+2)(a_0 \bar{a}_0 - 1)a_{n+2} = 2 \sum_{k=0}^n \bar{a}_k c_{n-k} - \sum_{k=1}^n (n-k+1)(n-k+2) A_k a_{n-k+2}.$$

$$A_k = \sum_{j=0}^k a_j \bar{a}_{k-j},$$

$$c_k = \sum_{j=0}^k (j+1)(k-j+1) a_{j+1} \bar{a}_{k-j+1}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функции, определенные формулой

$$\varphi(v) = e^{i\alpha} \frac{1 + \beta e^{i\gamma}}{1 - \bar{\beta} e^{i\gamma}}, \quad (7)$$

где α и γ — произвольные действительные, а β — произвольная комплексная постоянная, являются решениями уравнения (5).

Широкий класс аналитических по $\xi = \operatorname{Re} z$, $\eta = \operatorname{Im} z$ решений уравнения (6) дается хорошо известной формулой ^(1, 2)

$$v^{(1)} = \operatorname{Re} \int_0^1 f(\eta + i\xi - 2i\xi t) \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}},$$

где $f(\tau)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного τ . Другой класс решений уравнения (6), аналитических по ξ, η в полуплоскости $\xi > 0$ с логарифмической особенностью при $\xi = 0$ можно представить в виде

$$v^{(2)} = \operatorname{Re} \int_0^1 f(\eta + i\xi - 2i\xi t) \log[2i\xi t(1-t)] \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

В работах ^(1, 2) выписаны решения уравнения (6), когда $f(\tau) = \tau^n$:

$$v_n^{(1)} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=[(k+1)/2]}^{[n/2]} (-1)^{k+l} \binom{n}{k} \binom{n-k}{2l-k} 2^k \frac{\Gamma(k+1/2) \Gamma(1/2)}{k!} \xi^{2l} \eta^{n-2l},$$

$$v_n^{(2)} = v_n^{(1)} \log \xi + \sum_{k=0}^n \sum_{l=[(k+1)/2]}^{[n/2]} (-1)^{k+l} \binom{n}{k} \binom{n-k}{2l-k} \frac{2^k}{k!} \times$$

$$\times \Gamma(k+1/2) \Gamma(1/2) [\psi(k+1/2) - 2\psi(k+1) + \psi(1/2)] \xi^{2l} \eta^{n-2l},$$

$$n=0, 1, \dots$$

Легко видеть, что если $w(z)$ — решение уравнения (1'), удовлетворяющее условию $w(z) + 1 \neq 0$, то функция

$$w^* = \frac{w-1}{w+1} \quad (8)$$

будет решением уравнения (2). Поскольку каждое решение w уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{w + \bar{w}}{2(z + \bar{z})} \quad (9)$$

является решением уравнения (1'), подставляя в правую часть формулы (8) вместо w решения уравнения (9), получаем отличный от (7) класс решений уравнения (2).

Общее решение уравнения (9) имеет вид ⁽²⁾

$$w(z) = - \int_0^{\eta} \frac{\partial \omega(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau + \xi \int_0^{\xi} \frac{\partial u(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{dt}{t} + c\xi + i\omega(\xi, \eta),$$

где c — произвольная действительная постоянная,

$$\omega(\xi, \eta) = \xi^2 \operatorname{Re} \int_0^1 f(\eta + i\xi - 2i\xi t) \sqrt{t(1-t)} dt,$$

а $f(\tau)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного τ .

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
28 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. В. Бицадзе, В. И. Пашковский, ДАН, т. 216, № 2, 249 (1974). ² А. В. Бицадзе, В. И. Пашковский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 134, 26 (1975). ³ F. J. Ernst, J. Math. Phys., v. 15, № 9, 1409 (1974).