

УДК 550.834.01

ГЕОФИЗИКА

С. В. ГОЛЬДИН, В. Д. СУВОРОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОДОГРАФА ОТРАЖЕННЫХ ВОЛН

(Представлено академиком Г. И. Марчукем 20 XI 1974)

В этой заметке излагается новый, основанный на аналитическом продолжении годографа в комплексную плоскость подход к кинематической интерпретации отраженной волны, возбужденной и зарегистрированной на свободной границе вертикально-неоднородного слоя конечной мощности.

Слой описывается неотрицательной кусочно-гладкой функцией $v(z)$, $0 \leq z \leq H$, $0 < v_0 \leq v(z) \leq v_* < \infty$. В этом случае время прихода в точку x возбужденной в точке $x=0$ и отраженной от границы $z=H$ волны определяется, в соответствии с принципом Ферма, парой формул

$$X(p) = 2 \int_0^H \frac{pv(z)dz}{\sqrt{W(p,z)}}, \quad T(p) = 2 \int_0^H \frac{dz}{v(z)\sqrt{W(p,z)}}, \quad (1)$$

где

$$W(p, z) = 1 - p^2 v^2(z), \quad -1/v_*^2 \leq p \leq 1/v_0^2, \quad -x_* \leq x \leq x_* = X(1/v_*).$$

Положив в формулах (1) $p = \alpha + i\beta$, продолжим функции $X(p)$ и $T(p)$ на область P_0 комплексной плоскости p , проведя в последней разрезы вдоль вещественной оси из точек $\pm 1/v_*$ по направлению к $\pm \infty$ и исключив берега разрезов на отрезках $(-1/v_0, -1/v_*)$ и $(1/v_*, 1/v_0)$. Так как функция $W(p, z)$ отлична от нуля на $A_0 = P_0 \times (0, H)$ и отображает A_0 на плоскость W с вырезанной отрицательной частью вещественной оси, то функция $\sqrt{W(p, z)}$, а вместе с ней и оба интеграла (1) определяются при $p \in P_0$ единственным образом. Выбор арифметического значения корня на положительной части вещественной оси W обеспечивает соответствие между определением $X(p)$ и $T(p)$ и их физическим смыслом.

При любом $p \in P_0$ производные $X'(p)$ и $T'(p)$ существуют и конечны. Поэтому $X(p)$ и $T(p)$ — однозначные аналитические функции на P_0 . В совокупности они определяют аналитическую (в общем случае многозначную) функцию $t = \tilde{t}(x)$ на $X_0 = X(P_0)$.

Лемма 1. Функция $\tilde{t}(x)$ однозначна и регулярна во всякой односвязной области X^* , содержащей интервал $(-2iH, 2iH)$ мнимой оси, интервал $(-x_*, x_*)$ вещественной оси и не имеющей точек x' , удовлетворяющих условию

$$X'(p') = 0 \text{ при } X(p') = x'. \quad (2)$$

Полезный пример области X^* дает следующая

Лемма 2. Пусть $Q_a = \{p: \beta^2 > x^2 - a^2\}$, тогда при $a \leq 1/v_*$ функция $\tilde{t}(x)$ регулярна в $Y_a = X(Q_a)$.

Используя тригонометрическую формулу для подынтегрального выражения в (1) при $\beta^2 = \alpha^2 - 1/v_*^2$, получим

$$|X(p)|^2 = 4 \int_0^H \int_0^H F(z) F(\xi) G(z, \xi) dz d\xi,$$

$$F(z) = \frac{v(z)}{2^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left[\left(1 - \frac{v^2(z)}{v_*^2} \right)^2 + 4\alpha^2\beta^2 v^4(z) \right]^{-\frac{1}{4}},$$

$$G(z, \xi) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4[v^2(z) - v^2(\xi)]\alpha^2\beta^2}{[A^2 + 4\alpha^2\beta^2 v^2(z)v^2(\xi)]}}},$$

$$A = \left(1 - \frac{v^2(z)}{v_*^2} \right) \left(1 - \frac{v^2(\xi)}{v_*^2} \right).$$

Анализ полученного выражения для $|X(p)|^2$ показывает, что подынтегральное выражение при $v/v_0 \leq \sqrt{2}$ всегда не меньше 1. Отсюда вытекает

Лемма 3. Если $v/v_0 \leq \sqrt{2}$, то на границе области $Y_{1/v}$ имеет место оценка $|X(p)| \geq 2H$.

Теперь, основываясь на леммах 2 и 3, можно доказать утверждение, играющее большую роль в задачах аппроксимации и интерполяции годографов многочленами, а также при оценке параметров среды методами аналитического продолжения.

Теорема 1. Если $v/v_0 \leq \sqrt{2}$, то функция $\tilde{t}(x)$ аналитична в круге $|x| < 2H$.

В соответствии с теоремой 1 ряд Тейлора для $t(x)$ в окрестности нуля

$$t(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots \quad (3)$$

сходится при $|x| \leq 2H$, когда $v/v_0 \leq \sqrt{2}$. Данное условие достаточно, но не необходимо.

То, что условие $v/v_0 \leq \sqrt{2}$ не является необходимым, следует хотя бы из того, что, согласно известным ⁽¹⁾ выражениям для $t(x)$ при $v_e(z) = v_0 \exp(k, z)$ и $v_l(z) = v_0(1 + \beta z)$, функция $\tilde{t}_l(x)$ имеет особые точки только при $\pm 2iH$ и $\pm 2iH\sqrt{1 + 2(1 + \beta H)/\beta^2 H^2}$, а функция $\tilde{t}_e(x)$ — при $\pm 2iH + 4n\pi/k$, $n = \pm 0, 1$. Таким образом, обе функции регулярны в круге $|x| < 2H$ при любых β и k .

Функция $X(p)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки $p = \infty$. Обращая разложение $X(p)$ в окрестности $p = \infty$, легко вывести, что $x = \pm 2iH$ являются изолированными особыми точками. Отсюда следует

Лемма 4. Точки $x = \pm 2iH$ являются точками ветвления функции $\tilde{t}(x)$.

Из этой леммы, в частности следует, что ряд (3) при достаточно больших n является знакопеременным.

Лемма 5. Пусть α_{2H} есть решение уравнения $X(p) = 2H$, тогда

$$\max_{|x| \leq 2H} |\tilde{t}(x)| \leq \frac{2H}{v_0^2 \alpha_{2H}} \leq \sqrt{2} \frac{2H}{v_0} \frac{v}{v_0}. \quad (4)$$

На леммах 4 и 5 основывается

Теорема 2. Если $v/v_0 \leq \sqrt{2}$, то при достаточно больших n .

$$|t_n(x) - t(x)| \leq \sqrt{2} \frac{2H}{v_0} \frac{v}{v_0} \left(\frac{x}{2H} \right)^{2(n+1)},$$

где $t_n(x)$ — частичная сумма ряда (3).

Другое применение леммы 4 состоит в построении более «физичных» (сравнительно с рядом (3)) разложений для $t(x)$. А именно, в окрестности точек ветвления $\pm 2iH$ функция $\tilde{t}(x)$ представляется рядом по дробным степеням $x^2 + 4H^2$ вида

$$\tilde{t}(x) = \sqrt{x^2 + 4H^2} [A_0 + A_1(x^2 + 4H^2) + A_2(x^2 + 4H^2)^2 + \dots], \quad (5)$$

где

$$A_0 = \overline{v_1}, \quad A_1 = -\overline{v_1}(v_2 - v_1^2)/32H^2v_1^2, \dots, \quad v_k = (1/H) \int_0^H dz v^k(z), \\ k=1, 2, \dots$$

Параметры v_k можно трактовать как моменты функции $1/v^2(z)$ относительно равномерного распределения z на интервале $(0, H)$.

Представление (5) имеет четкий физический смысл: его первое слагаемое дает однородную среду; второе, будучи пропорциональным среднему квадрату отклонения $1/v^2(z)$ от v_1 , выражает степень неоднородности среды.

Предложенное в заметке аналитическое продолжение годографа позволяет по-новому подойти к доказательству единственности обратной задачи и конструированию ее решения.

Лемма 6. Пусть $1/v_* \leq q \leq 1/v_0$, тогда на множестве полной меры интервала $(1/v_*, 1/v_0)$ пара $\{\operatorname{Re} X(q), \operatorname{Re} T(q)\}$ описывает полный годограф рефрагированных волн для слоя $v=v_0(z)$, включающий участки годографов отраженных волн от внутренних границ этого слоя:

$$X(q) = 2 \int_0^{zq=0} \frac{qv_0(z) dz}{\sqrt{1-q^2v_0^2(z)}} + 2i \int_{zq=0}^H \frac{qv_0(z) dz}{\sqrt{q^2v_0^2(z)-1}}, \\ T(q) = 2 \int_0^{zq=0} \frac{dz}{v_0(z) \sqrt{1-q^2v_0^2(z)}} + 2i \int_{zq=0}^H \frac{dz}{v_0(z) \sqrt{q^2v_0^2(z)-1}}.$$

здесь

$$v_0(z) = \sigma^{-1}[z; v(z)], \quad \sigma[u; v(z)] = \operatorname{mes}\{z: v(z) \leq u, 0 \leq z \leq H\}.$$

Условимся считать функции $v_1(z)$ и $v_2(z)$ 0-эквивалентными, если $\sigma(u; v_1) = \sigma(u; v_2)$. Тогда из единственности аналитического продолжения, а также лемм 4 и 6 следует

Теорема 3. Пусть годограф $t(x)$ задан на произвольном конечном интервале (a, b) , $-x_* \leq a < b \leq x_*$, тогда:

а) параметр H определяется единственным образом независимо от информации о функции $v(z)$,

б) функция $v(z)$ определяется с точностью до 0-эквивалентности.

Заметим, что оценка $v(z)$ с точностью до 0-эквивалентности эквивалентна оценке всех v_k , $k=1, 2, \dots$, поэтому справедливость теоремы можно было бы вывести непосредственно из разложения (5).

Примечание. Содержащийся в теореме 3 результат был получен (другим методом) М. Л. Гервером и В. М. Маркушевичем⁽²⁾ для интервала (a, b) , являющегося окрестностью нуля. Данное здесь усиление теоремы гарантирует не только единственность, но и устойчивость оценки параметра H (в отличие от оценки $v_0(z)$), по крайней мере, при $b-a \sim 2H$, так как в точках $\pm 2iH$ имеет место наиболее характерная особенность годографа. Теорема позволяет сформулировать задачу оценки мощности слоя как задачу аналитического продолжения $t(x)$.

Конструктивным способом оценки параметра H является разложение $x^2 = c_0 + c_1 t^2 + c_2 t^4 + \dots$, для которого $c_0 = -4H^2$, $c_1 = 1/v_1$, $c_2 = -(v_2 - v_1^2)/16H^2v_1^4, \dots$

Использование двучлена $c_0 + c_1 t^2$ эквивалентно применению модели однородной среды (метод эффективных параметров). Расчеты показывают, что при оценке коэффициента c_0 по экспериментальным годографам доста-

точно ограничиться трехчленом $c_0 + c_1 t^2 + c_2 t^4$. Коэффициенты c_1 и c_2 дают «моменты» ν_1 и ν_2 функции $1/v^2(z)$.

Институт геологии и геофизики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
14 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Л. Гервер, В. М. Маркушевич, Определение по годографу скорости распределения сейсмических волн. В сб.: Вычислительная сейсмология, в. 3, М., «Наука», 1967. ² Н. Н. Пузырев, Интерпретация данных сейсморазведки методом отраженных волн, М., Гостехиздат, 1959.