

УДК 519.27

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. А. ДУБКОВ, А. Н. МАЛАХОВ

КУМУЛЯНТНЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Греховым 22 X 1974)

1. Во многих статистических задачах радиофизики, нелинейной оптики, физики плазмы, в большинстве задач статистической гидродинамики и т. п. обычно приходят к бесконечной цепочке зацепляющихся уравнений для моментов, переход от которой к конечной системе уравнений совершается путем отбрасывания высших моментов (см., например, ⁽¹⁻³⁾), хотя эту операцию невозможно сколь-нибудь строго обосновать, поскольку не существует несингулярной функции, все высшие моменты которой равнялись бы нулю.

Помимо совокупности моментов столь же полное статистическое описание дается и совокупностью кумулянтов, обладающих рядом преимуществ перед моментами. Именно кумулянты, а не моменты описывают корреляционные связи высших порядков, т. е. учитывают любую степень негауссовости случайных переменных (в случае гауссовой связи все старшие кумулянты обращаются в нуль); аппроксимации плотностей вероятностей в виде ряда по кумулянтам, как правило, более удачны, чем аналогичные представления с помощью моментов (поскольку моменты, в отличие от кумулянтов, растут значительно быстрее) и, наконец, можно показать, что конечному набору кумулянтов всегда соответствует некоторая вещественная функция, аппроксимирующая исследуемое вероятностное распределение. Таким образом, кумулянтный анализ случайных переменных представляется более перспективным.

В литературе (см., например, ^(4, 5)) уже рассматривались вопросы кумулянтного анализа некоторых нелинейных преобразований. В настоящей статье предлагается новый метод исследования систем, описываемых произвольной нелинейной функциональной связью «выхода» со «входом». Он основан на получении и анализе уравнений в вариационных производных, связывающих средние значения широкого класса функционалов от негауссовых случайных переменных с их кумулянтными функциями (тензорами) и является обобщением работы ⁽⁶⁾, где предложены уравнения, позволяющие размыкать средние значения функций от негауссовых переменных.

2. Характеристический функционал, представляющий статистические свойства совокупности двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$,

$$\Theta_{xy}[u, v] = \left\langle \exp \left\{ i \int u(t) x(t) dt + i \int v(t) y(t) dt \right\} \right\rangle = \langle f[ux, vy] \rangle,$$

записывается через кумулянтные функции совокупности $\chi_{p+q}^{x,y}$, как

$$\Theta_{xy}[u, v] = \exp \left\{ \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{i^{p+q}}{p!q!} \int \dots \int \chi_{p+q}^{x,y}(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q) \prod_{j=1}^p u(t_j) dt_j \prod_{k=1}^q v(\tau_k) d\tau_k \right\}. \quad (1)$$

Применяя к обеим частям (1) операцию вариационного дифференцирования $\delta/\delta\kappa_{p+q}^{x,y}$, приходим к выражению

$$\frac{\delta\Theta_{xy}[u, v]}{\delta\kappa_{p+q}^{x,y}(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q)} = \frac{i^{p+q}}{p!q!} \prod_{j=1}^p u(t_j) \prod_{k=1}^q v(\tau_k) \Theta_{xy}[u, v].$$

С другой стороны,

$$\frac{\delta^{p+q}f[dx, vy]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_p) \delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q)} = i^{p+q} \prod_{j=1}^p u(t_j) \prod_{k=1}^q v(\tau_k) f[ux, vy].$$

Проводя здесь осреднение и сравнивая полученный результат с предыдущим выражением, находим

$$\frac{\delta \langle f[ux, vy] \rangle}{\delta\kappa_{p+q}^{x,y}(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q)} = \frac{1}{p!q!} \left\langle \frac{\delta^{p+q}f[ux, vy]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_p) \delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q)} \right\rangle. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь функционал $F[x, y]$, представляющий в общем случае произвольное нелинейное инерционное преобразование двух случайных процессов. Среднее значение этого функционала зависит, очевидно, от всех кумулянтных функций совокупности. Можно показать, что функциональные производные $\langle F[x, y] \rangle$ по $\kappa_{p+q}^{x,y}$ определяются уравнением, полностью совпадающим с (2):

$$\frac{\delta \langle F[x, y] \rangle}{\delta\kappa_{p+q}^{x,y}(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q)} = \frac{1}{p!q!} \left\langle \frac{\delta^{p+q}F[x, y]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_p) \delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q)} \right\rangle. \quad (3)$$

Это уравнение является основой кумулянтного анализа функционалов. Используя (3) повторно, найдем, например,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \langle F[x, y] \rangle}{\delta\kappa_{p+q}^{x,y}(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q) \delta\kappa_{m+n}^{x,y}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m; \nu_1, \dots, \nu_n)} &= \frac{1}{p!q!m!n!} \times \\ &\times \left\langle \frac{\delta^{p+q+m+n}F[x, y]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_p) \delta x(\vartheta_1) \dots \delta x(\vartheta_m) \delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q) \delta y(\nu_1) \dots \delta y(\nu_n)} \right\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Так же находится выражение и для любой вариационной производной функционала $\langle F[x, y] \rangle$ по произвольному числу кумулянтных функций.

Для нелинейного инерционного преобразования одного случайного процесса $x(t)$ уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\delta \langle F[x] \rangle}{\delta\kappa_m^x(t_1, \dots, t_m)} = \frac{1}{m!} \left\langle \frac{\delta^m F[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_m)} \right\rangle. \quad (5)$$

Отметим, что в (7) в предположении гауссового процесса $x(t)$ были получены частные случаи уравнения (5) для $m=1$, $m=2$. Таким образом, функциональное уравнение (5) обобщает результаты, полученные в (7), на случай произвольного негауссового процесса.

Аналогичным образом соотношения вида (3) выводятся и для произвольного нелинейного функционала $\mathcal{H}[\vec{x}] = \mathcal{H}[x_1(t), \dots, x_n(t)]$, зависящего от совокупности многих случайных процессов $\vec{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \langle \mathcal{H}[\vec{x}] \rangle}{\delta\kappa_{p_1+\dots+p_n}^{\vec{x}}(t_1^{(1)}, \dots, t_{p_1}^{(1)}; \dots; t_1^{(n)}, \dots, t_{p_n}^{(n)})} &= \\ &= \frac{1}{p_1! \dots p_n!} \left\langle \frac{\delta^{p_1+\dots+p_n} \mathcal{H}[\vec{x}]}{\delta x_1(t_1^{(1)}) \dots \delta x_n(t_{p_n}^{(n)})} \right\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

и случайных полей $\vec{x}(t, \vec{r}) = \{x_1(t, \vec{r}), \dots, x_n(t, \vec{r})\}$:

$$\frac{\delta \langle \mathcal{H}[\vec{x}] \rangle}{\delta \kappa_{p_1+ \dots + p_n}^{\vec{x}}(t_1^{(1)}, \vec{r}_1^{(1)}; \dots; t_{p_1}^{(1)}, \vec{r}_{p_1}^{(1)}; \dots; t_1^{(n)}, \vec{r}_1^{(n)}; \dots; t_{p_n}^{(n)}, \vec{r}_{p_n}^{(n)})} = \frac{1}{p_1! \dots p_n!} \times \\ \times \left\langle \frac{\delta^{p_1+ \dots + p_n} \mathcal{H}[\vec{x}]}{\delta x_1(t_1^{(1)}, \vec{r}_1^{(1)}) \dots \delta x_1(t_{p_1}^{(1)}, \vec{r}_{p_1}^{(1)}) \dots \delta x_n(t_1^{(n)}, \vec{r}_1^{(n)}) \dots \delta x_n(t_{p_n}^{(n)}, \vec{r}_{p_n}^{(n)})} \right\rangle; \quad (7)$$

здесь $\kappa_{p_1+ \dots + p_n}^{\vec{x}}$ — кумулянтные тензоры $(p_1+ \dots + p_n)$ -го ранга.

Используя (6) и (7) многократно, легко получить уравнения и для вариационной производной по произвольному числу кумулянтных тензоров совокупности.

3. Проиллюстрируем использование полученных уравнений на примере частного случая, когда $F[x, y] = P[x]R[y]$. В этом случае функциональное уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\delta \langle P[x]R[y] \rangle}{\delta \kappa_{p+q}^{x,y}(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q)} = \frac{1}{p!q!} \left\langle \frac{\delta^p P[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_p)} \frac{\delta^q R[y]}{\delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q)} \right\rangle. \quad (8)$$

Если, например, совокупность $\{x(t), y(t)\}$ является гауссовой с нулевыми средними значениями, то $\langle P[x]R[y] \rangle$ зависит лишь от одной совместной кумулянтной функции $\kappa_{1+1}^{x,y}(t, \tau) = \langle x(t)y(\tau) \rangle$. В этом случае $\langle P[x]R[y] \rangle$ можно разложить в функциональный ряд по $\langle x(t)y(\tau) \rangle$, коэффициенты которого (зависящие от кумулянтных функций распределений $x(t)$ и $y(t)$) элементарно определяются из (8). Таким образом, получим (ср. с (8))

$$\langle P[x]R[y] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int_{2n} \left\langle \frac{\delta^n P[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} \right\rangle \times \\ \times \left\langle \frac{\delta^n R[y]}{\delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_n)} \right\rangle \prod_{i=1}^n \langle x(t_i)y(\tau_i) \rangle dt_i d\tau_i. \quad (9)$$

Формула (9) легко обобщается и на гауссовую совокупность любого числа случайных процессов и полей.

4. Пусть теперь $P[x] = x(t)$. В этом случае $\langle x(t)R[y] \rangle$ зависит только от совместных кумулянтных функций вида $\kappa_{1+q}^{x,y}(t; \tau_1, \dots, \tau_q)$, причем, как следует из (8), линейно. Решая (8), легко прийти к следующему важному разложению:

$$\langle x(t)R[y] \rangle = \\ = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \int \dots \int_q \left\langle \frac{\delta^q R[y]}{\delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q)} \right\rangle \kappa_{1+q}^{x,y}(t; \tau_1, \dots, \tau_q) d\tau_1, \dots, d\tau_q, \quad (10)$$

позволяющему размыкать средние вида $\langle x(t)R[y] \rangle$ для произвольной негауссовой совокупности $\{x(t), y(t)\}$. Как следует отсюда, эта негауссовость учитывается в (10) слагаемыми с совместными кумулянтными функциями высших порядков ($q > 1$).

Для случайных полей на основании (7) ряд (10) принимает вид

$$\begin{aligned} & \langle x_i(t, \vec{r}) \mathcal{H}[\vec{x}] \rangle = \\ & = \sum_{p_1, \dots, p_n=0}^{\infty} \frac{1}{p_1! \dots p_n!} \int \dots \int_{4(p_1 + \dots + p_n)} \left\langle \frac{\delta^{p_1 + \dots + p_n} \mathcal{H}[\vec{x}]}{\delta x_1(t_1^{(1)}, \vec{r}_1^{(1)}) \dots \delta x_n(t_n^{(n)}, \vec{r}_n^{(n)})} \right\rangle \times \\ & \times \mathcal{K}_{p_1 + \dots + (p_1+1) + \dots + p_n}^{x_i, x_j}(t_1^{(1)}, \vec{r}_1^{(1)}; \dots; t_1^{(i)}, \vec{r}_1^{(i)}; \dots; t_{p_i}^{(i)}, \vec{r}_{p_i}^{(i)}; t, \vec{r}; \dots \\ & \dots; t_{p_n}^{(n)}, \vec{r}_{p_n}^{(n)}) dt_1^{(1)} d\vec{r}_1^{(1)} \dots dt_{p_n}^{(n)} d\vec{r}_{p_n}^{(n)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для гауссовой совокупности случайных процессов и полей с нулевыми средними значениями, для которых отличен от нуля только тензор второго ранга $\mathcal{K}_{i+1}^{x_i, x_j}$, формула (11) автоматически переходит в формулу Фуруцу — Новикова^(9, 10); а (10) — в ее аналог для случайных процессов

$$\langle x(t) R[y] \rangle = \int \left\langle \frac{\delta R[y]}{\delta y(\tau)} \right\rangle \langle x(t) y(\tau) \rangle d\tau. \quad (12)$$

5. В качестве примера конкретного функционала рассмотрим нелинейное инерционное преобразование ($h(t)$ — системная функция)

$$z(t) = Q_i[w] = \int_{-\infty}^t h(t-u) w^2(u) du,$$

описывающее генерацию второй гармоники в нелинейной среде (см. (2)).

Пусть $w(t)$ — входной узкополосный случайный процесс с $\langle w \rangle = 0$.

Определим корреляционную функцию $K_z(t, \tau) = \langle z(t) z(t+\tau) \rangle$. Решая функциональное уравнение (8) для $P[x] = Q_i[w]$ и $R[y] = Q_{i+\tau}[w]$, в котором $p, q \leq 2$, получим

$$\begin{aligned} K_z(t, \tau) = & \int_0^\infty \int_0^\infty h(u) h(v) [2\mathcal{K}_2^2(t-u, t+\tau-v) + \\ & + \mathcal{K}_4(t-u, t-u, t+\tau-v, t+\tau-v)] du dv. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, искомая корреляционная функция при произвольном вероятностном распределении входа определяется только его второй и четвертой кумулянтными функциями. Для гауссового входа под интегралом (13) остается лишь первый член. Тем самым второе слагаемое в интеграле описывает эффект негауссовости входа. Отметим, что, поскольку $\mathcal{K}_4(t_1, t_2, t_3, t_4)$ может принимать отрицательные значения, постольку эта негауссовость может приводить к существенному уменьшению мощности второй гармоники.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
25 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., «Наука», 1967. ² С. А. Азманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, М., Изд-во МГУ, 1971. ³ Р. Х. Крейчнан, В сб.: Гидродинамическая неустойчивость, М., «Мир», 1964. ⁴ В. П. Леонов, А. Н. Ширяев, Теория вероятностей и ее применения, т. 4, № 3, 342 (1959). ⁵ А. Н. Ширяев, Теория вероятностей и ее применения, т. 5, № 3, 293 (1960). ⁶ А. Н. Малахов, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, т. 16, № 8, 1287 (1973). ⁷ C. D. Gorman, J. Zaborszky, IEEE Trans. on Inform. Theory, IT-14, № 4, 528 (1968). ⁸ Г. Н. Бочков, А. А. Дубков, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, т. 17, № 3, 376 (1974). ⁹ K. Furutsu, J. Res. Nat. Bur. Stand., v. 67D, № 3, 303 (1963). ¹⁰ Е. А. Новиков, ЖЭТФ, т. 47, № 5 (11), 1919 (1964).