

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. НАГНИБИДА

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть A_R — пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$, $0 < R \leq \infty$, функций с обычной топологией, а $A_R^{(n)}$ — топологическое произведение n экземпляров пространств A_R . В нашей заметке ⁽¹⁾ введено, следуя М. В. Келдышу, несколько понятий кратной полноты систем аналитических функций. А именно, система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty \subset A_R$ называлась слабо n -кратно полной в A_R , если существуют такие последовательности функций $\{\psi_{k,v}(z)\}_{k=0}^\infty$, $v=1, \dots, n-1$, что система

$$\{\varphi_k(z), \psi_{k,1}(z), \dots, \psi_{k,n-1}(z)\}_{k=0}^\infty$$

полна в $A_R^{(n)}$. Если же в качестве $\psi_{k,v}(z)$ можно взять функции $C_{k,v}\varphi_k(z)$, где $C_{k,v}$, $k \geq 0$; $v=1, \dots, n-1$, — некоторые постоянные, то система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ называлась n -кратно полной в A_R . Там же показано, что если $f(z) \in A_R$, а $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ — некоторая последовательность отличных от нуля комплексных чисел, причем $|\alpha_k| \leq 1$ и $\alpha_k \rightarrow 0$, то система $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^\infty$ является n -кратно полной в A_R тогда и только тогда, когда тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ отличны от нуля. Что касается естественной для A_R системы $\{z^k\}_{k=0}^\infty$, то она не n -кратно полна, но является слабо n -кратно полной.

В этой заметке мы хотим сделать несколько замечаний относительно слабой кратной полноты.

1. Как уже отмечалось в ⁽¹⁾ (см. теорему 2), в некоторых случаях понятия обычной полноты и слабой кратной полноты в A_R оказываются эквивалентными. Нам представляется весьма правдоподобной следующая

Гипотеза. Если система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ полна в A_R в обычном понимании, то она и слабо n -кратно полна в нем (при любом натуральном n).

Приведем некоторые соображения, которые подтверждают высказанную гипотезу в частных случаях. Вначале заметим (учитывая критерий С. Банаха кратной полноты ⁽¹⁾), что если система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ слабо n -кратно полна в A_R , то она является таковой и в каждом из пространств A_r с $0 < r < R$. Как мы сейчас легко проверим, слабо n -кратно полной в любом A_r , $0 < r < R$, является также произвольная полная (в обычном понимании) в A_R система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$.

Действительно, для этого достаточно рассмотреть систему

$$\left\{ f(\alpha_k z), e^{-1/|\alpha_k|} f(\alpha_k z), \dots, e^{-(n-2)/|\alpha_k|} f(\alpha_k z), \frac{e^{-(n-1)/|\alpha_k|}}{\varphi_k^+(r_1)} \varphi_k(z) \right\}_{k=0}^\infty,$$

где функция $f(z)$ с отличными от нуля тейлоровскими коэффициентами принадлежит A_R , $0 < |\alpha_k| \leq 1$, $\alpha_k \rightarrow 0$, $r < r_1 < R$, а

$$\varphi_k^+(r_1) = \sum_{s=0}^{\infty} |\varphi_{k,s}| r_1^s,$$

и повторить, например, те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 из (1).

В связи с этим возникает следующий вопрос *: будет ли слабо кратно полной в A_R система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, если она является таковой в произвольном A_r , $0 < r < R$? Конечно, это будет так (см. критерий кратной полноты), если выбор функций $\psi_{k,v}(z)$ в каждом из A_r не зависит от r . В общем же случае этот вопрос пока остается открытым.

Учитывая сказанное выше, мы легко убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Утверждение 1. Если функции $\varphi_k(z)$ аналитичны в круге $|z| < R_1$, где $R_1 > R$, то система $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ слабо кратно полна в A_R тогда и только тогда, когда она полна в нем в обычном понимании.

Очевидно, это утверждение остается в силе и в том случае, если от функций $\varphi_k(z)$ требовать аналитичности лишь в круге $|z| < R$, но чтобы каждая из них в этом же круге была ограничена.

Утверждение 2. Если функции $\varphi(z)$ и $f(z)$ аналитичны в круге $|z| < R$, $0 < |\alpha_k| \leq 1$ и $\alpha_k \rightarrow 0$, а последовательность $\{\varphi^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в A_R , то система

$$\left\{ f(\alpha_k z), e^{-1/|\alpha_k|} f(\alpha_k z), \dots, e^{-(n-2)/|\alpha_k|} f(\alpha_k z), \frac{e^{-(n-1)/|\alpha_k|}}{(k!)^2} \varphi^{(k)}(z) \right\}_{k=0}^{\infty}$$

полна в $A_R^{(n)}$ (т. е. последовательность $\{\varphi^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ является слабо n -кратно полной в A_R), если только тейлоровские коэффициенты $f(z)$ отличны от нуля.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, также достаточно повторить те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 из (1), но при этом нужно учесть следующие очевидные оценки:

$$\frac{1}{k!} \max_{|z| \leq \rho} |\varphi^{(k)}(z)| \leq \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho)^k} \max_{|z| \leq \rho_1} |\varphi(z)|, \quad k \geq 0; \quad 0 < \rho < \rho_1 < R.$$

Отметим еще (см. утверждение 1), что системы классических полиномов (Эрмита, Лагерра и т. п.) являются слабо n -кратно полными в любом пространстве A_R , $0 < R < \infty$.

Резюмируя, мы должны заключить, что интересным для пространства A_R является исследование систем функций именно на кратную (см. определение 2 работы (1)), но не слабо кратную полноту.

2. Займемся теперь отысканием тех условий, при выполнении которых линейный непрерывный в A_R оператор T переводит кратно полную в A_R систему $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ также в кратно полную.

Отметим вначале, что если $\{\varphi_k(z)\}$ — произвольная последовательность функций из A_R , а $\{T\varphi_k(z)\}$ n -кратно полна в ней, то $\overline{\mathcal{R}}_T = A_R$, так как $\{T\varphi_k(z)\}$ полна в A_R в обычном смысле (здесь $\mathcal{R}_T$ — область значений оператора T). Предполагая, наоборот, условие $\overline{\mathcal{R}}_T = A_R$ выполненным, рассмотрим некоторую n -кратно полную в A_R систему $\{\varphi_k(z)\}$. Следовательно, мы предполагаем также существование таких последовательностей $\{C_{k,v}\}$, $v=1, \dots, n-1$, комплексных чисел, что система

$$\{\psi_k(z), C_{k,1}\varphi_k(z), \dots, C_{k,n-1}\varphi_k(z)\} \quad (*)$$

полна в $A_R^{(n)}$ (см. (1)).

Покажем сейчас, что полной в $A_R^{(n)}$ является также система

$$\{T\psi_k(z), C_{k,1}T\psi_k(z), \dots, C_{k,n-1}T\psi_k(z)\}.$$

* В случае положительного (отрицательного) ответа на него высказанная ранее гипотеза была бы, очевидно, доказанной (опровергнутой).

Действительно, если линейные непрерывные в A_R функционалы $L_1, \dots, L_n$ удовлетворяют при всех $k \geq 0$ соотношениям

$$L_1(T\psi_k(z)) + C_{k,1}L_2(T\psi_k(z)) + \dots + C_{k,n-1}L_n(T\psi_k(z)) = 0,$$

то из полноты в $A_R^{(n)}$ системы (*) следует, что

$$T^*L_1 = \dots = T^*L_n = 0,$$

где T^* — сопряженный оператор к T , а 0 — функционал аннулирования. Поскольку же, $\overline{\mathcal{R}}_T = A_R$, то, очевидно, оператор T^* нетривиальных нулей не имеет и поэтому $L_1 = \dots = L_n = 0$. Следовательно, система $\{T\psi_k(z)\}$ также является n -кратно полной в A_R .

Таким образом, справедливо

Утверждение 3. Если линейный непрерывный в A_R оператор T переводит некоторую систему (не обязательно кратно полную!) в n -кратно полную, то $\overline{\mathcal{R}}_T = A_R$. И наоборот, если только $\overline{\mathcal{R}}_T = A_R$, то оператор T переводит любую n -кратно полную систему в A_R также в n -кратно полную.

Следствие 1. Для того чтобы линейный непрерывный в A_R оператор T переводил каждую n -кратно полную систему в n -кратно полную, необходимо и достаточно, чтобы он переводил хотя бы одну систему в полную в обычном смысле.

Следствие 2. Если T — линейный непрерывный в A_R оператор, а $\{\varphi_k(z)\}$ и $\{\psi_k(z)\}$ n -кратно полны, то системы $\{T\varphi_k(z)\}$ и $\{T\psi_k(z)\}$ могут быть n -кратно полными в A_R лишь одновременно.

3. В связи с изложенным выше любопытным представляется вопрос о существовании линейных непрерывных в A_R операторов T , переводящих в n -кратно полные те системы, которые сами таковыми не являются.

Пусть, как и раньше, $f(z)$ — аналитическая в круге $|z| < R$ функция с отличными от нуля тейлоровскими коэффициентами, а $\{\alpha_k\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел, причем $0 < |\alpha_k| \leq 1$ и $\alpha_k \rightarrow 0$. Определив на элементах базиса $\{z^k\}$ пространства A_R оператор T соотношениями

$$Tz^k = f(\alpha_k z), \quad k=0, 1, \dots,$$

можно легко проверить, что он линейно и непрерывно расширяется на все A_R , если только $R > 1$. Следовательно, так построенный оператор T может служить примером линейного непрерывного отображения пространства A_R , $R > 1$, в себя, переводящего не являющуюся n -кратно полной систему $\{z^k\}$ в n -кратно полную $\{f(\alpha_k z)\}$.

Если, кроме того, положить, например, $\alpha_k = \omega^k$, $|\omega| < 1$, то соответствующий оператор T , как легко проверить, не имеет в A_R нетривиальных нулей. Таким образом, этот оператор T является линейным непрерывным отображением пространства A_R , $R > 1$, в себя без нетривиальных нулей, для которого $\overline{\mathcal{R}}_T = A_R$, но $\mathcal{R}_T \neq A_R$, ибо в противном случае (на основании теоремы Банаха об обратном операторе) он был бы изоморфизмом A_R на себя, что, очевидно, невозможно.

Замечание. Из определения кратной полноты или еще проще, из критерия Банаха следует, что если $\{f_k(z)\}$ m -кратно ($m \geq 2$ целое) полна в A_R , то она и $(m-1)$ -кратно полна. Иначе говоря, если система не m -кратно полна, то она не может быть и $(m+1)$ -кратно полной.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
30 IX 1974

Черновыцкий государственный университет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. И. Ибрагимов, Н. И. Нагнибида, ДАН, т. 214, № 5, 1009 (1974).