

А. Г. КУХАРЕНКО, Ю. А. КУХАРЕНКО

О ЗВУКОВОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ДИСКА, ПОКРЫТОГО ИМПЕДАНСНЫМ СЛОЕМ

(Представлено академиком В. В. Струминским 27. XI 1974)

Хорошо известно, что вблизи тела, линейные размеры которого малы по сравнению с длиной λ падающей плоской волны (так что справедливо приближение Рэлея), звуковое поле слабо зависит от угла падения. Однако в экспериментах одного из авторов (А. Г. Кухаренко), в которых измерялось поле вблизи поверхности тяжелого тела с размерами $a \ll \lambda$, облицованного покрытием, характеризуемым импедансом $1/g$, в некоторой области частот наблюдалась сильная угловая зависимость амплитуды поля.

Попытка теоретического объяснения этого эффекта была предпринята в работе Г. Д. Малюживца ⁽¹⁾, который изучил пространственное распределение поля вблизи неподвижной сферы, характеризуемой импедансом $1/g$, зависящим от безразмерного радиуса сферы $\varepsilon = ka = 2\pi a/\lambda$, и показал, что поле может существенно зависеть от углов, если величина $g(\varepsilon)$ имеет полюс при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поскольку эксперименты проводились на круглом диске с разнообразными покрытиями, представляет интерес решить аналогичную задачу для диска. С этой целью исследуем звуковое поле давлений P и скоростей v вблизи неподвижного тонкого диска радиуса $a \ll \lambda$ на расстояниях $r \ll \lambda$ от него. Для простоты ограничимся случаем нормального падения плоской волны

$$P_i = P_0 \exp(ikz - i\omega t)$$

на диск из $z = -\infty$. Для решения задачи удобно ввести вырожденные эллиптические координаты ⁽²⁾ ξ, η, φ , связанные с декартовыми координатами формулами

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \cos \varphi, & 0 < \xi < \infty, \\ y &= a\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \sin \varphi, & -1 < \eta < 1, \\ z &= a\xi\eta, & 0 < \varphi < 1. \end{aligned} \quad (1)$$

На больших расстояниях от диска $r \gg a$ эллиптические координаты переходят в сферические: $r = a\xi$, $\cos \vartheta = \eta$, $\varphi = \varphi$.

Волновое уравнение запишется в виде (мы отделили временной множитель $\exp(-i\omega t)$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1+\xi^2) \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1-\eta^2) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] + \\ & + \left[\frac{1}{1-\eta^2} - \frac{1}{1+\xi^2} \right] \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \varepsilon(\xi^2 + \eta^2)P = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon = ka$, $k = \omega/c$, c — скорость звука в среде. Граничные условия на поверхности диска имеют вид:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} + i\varepsilon g P = 0, \quad \xi = 0, \quad (3)$$

где g — комплексный адмитанс, равный отношению $\frac{\rho c v}{aP}$ в данной точке на поверхности диска, ρ — плотность среды.

Мы рассмотрим случай, когда величина g постоянна на поверхности диска, т. е. не зависит от η и ϕ , но зависит от ε . Искомое решение должно также удовлетворять известному условию отсутствия сходящихся из бесконечности рассеянных волн.

Общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде ряда по сфероидальным функциям и затем воспользоваться разложением по малому параметру $\varepsilon \ll 1$. Оказывается, однако, что решение в этом пределе выражается через элементарные функции. В связи с этим проще искать решение уравнения (2) непосредственно по теории возмущений. В нулевом и первом приближении по ε последним членом уравнения (2) можно пренебречь. В результате поле давлений вблизи диска удовлетворяет уравнению Лапласа. Из условий симметрии задачи (нормальное падение) исчезает также член, содержащий производную по ϕ . Граничные условия к оставшемуся уравнению можно записать в виде (мы разлагаем падающую волну по ε и ограничиваемся членами $\sim \varepsilon$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} + i\varepsilon g P &= 0, \quad \xi = 0, \\ P &\rightarrow 1 + i\varepsilon \xi \eta, \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что, поскольку мы рассматриваем ближнюю зону, в формуле (4) фигурирует расстояние r , большое по сравнению с радиусом диска a , но малое по сравнению с λ . Во избежание недоразумений подчеркнем, что в отличие от условия Зоммерфельда, накладываемого в дальней зоне, условие (4) годится только вблизи диска и позволяет выделять единственное решение уравнения Лапласа.

Решение уравнения (2) в рассматриваемом приближении будем искать в виде

$$P(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\xi) \eta, \quad (5)$$

где функции f_1 и f_2 удовлетворяют независимым уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{\partial f_2}{\partial \xi} \right] - 2f_2 = 0 \quad (6)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + i\varepsilon g f_1 &= 0, \quad \xi = 0, \\ f_1 &\rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow \infty; \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + i\varepsilon g f_2 &= 0, \quad \xi = 0, \\ f_2 &\rightarrow i\varepsilon \xi, \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение уравнений (6), (7) имеет вид

$$f_1(\xi) = \frac{1 - i\varepsilon g \operatorname{arctg} \xi}{1 - i(\pi/2)\varepsilon g}, \quad f_2(\xi) = \frac{1 + \xi \operatorname{arctg} \xi}{\pi/2 - i\varepsilon g} i\varepsilon. \quad (8)$$

Выражения (5), (8) дают окончательное решение задачи при любом адмитансе g :

$$P(\xi, \eta) = \frac{1 - i\varepsilon g \operatorname{arctg} \xi}{1 - i(\pi/2)\varepsilon g} + i\varepsilon \eta \frac{1 + \xi \operatorname{arctg} \xi}{\pi/2 - i\varepsilon g}. \quad (9)$$

Разлагая (9) по ξ , находим звуковое поле вблизи диска

$$P(\xi, \eta) = \frac{1 - i\varepsilon g \xi}{1 - i(\pi/2)\varepsilon g} + \frac{i\varepsilon \eta}{\pi/2 - i\varepsilon g}, \quad \xi \ll 1. \quad (10)$$

В случае жесткого диска $g=0$, из выражения (9) получаем

$$P(\xi, \eta) = 1 + \frac{2i\varepsilon}{\pi} \eta (1 + \xi \operatorname{arctg} \xi). \quad (11)$$

В случае мягкого диска $g=\infty$ имеем

$$P(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \xi. \quad (12)$$

Если адмитанс g является ограниченной функцией частоты в окрестности $\varepsilon=0$, то из решения (9) получаем обычное приближение Рэлея

$$P(\xi, \eta) = 1 + i\varepsilon g \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \xi \right) + \frac{2i\varepsilon}{\pi} \eta (1 + \xi \operatorname{arctg} \xi), \quad (13)$$

в котором несимметричная часть поля вносит малый вклад $\sim \varepsilon$ по сравнению с симметричной.

Ситуация, однако, существенно меняется, если адмитанс g , как функция частоты, имеет полюс в области малых частот. В этом случае дипольный член в выражении (9) может стать сравнимым с членом, не зависящим от угла. Пусть, например, $g = g' + ig''$, $g'' = -\pi/(2\varepsilon)$. Тогда поле вблизи диска ($\xi \ll 1$) имеет вид

$$P(\xi, \eta) = \frac{1}{1 - \pi^2/4} - \frac{1}{g'} \eta \quad (14)$$

и существенно несимметрично при $g' \sim 1$, поскольку оба члена в выражении (14) в этом случае одного порядка. Ширина частотной области (ω_1, ω_2), в которой угловая зависимость поля существенна, определяется шириной интервала ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$), в котором мнимая часть адмитанса g'' пропорциональна $1/\varepsilon$.

Найденные закономерности позволяют качественно и количественно объяснить экспериментальные результаты, полученные одним из авторов. Детальное сравнение теоретических и экспериментальных результатов будет проведено в отдельной работе.

Всесоюзный научно-исследовательский и
проектно-конструкторский институт
кранового и тягового электрооборудования
Москва

Поступило
27 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Д. Малюжинец, ДАН, т. 184, № 6 (1969). ² Х. Хёни, А. Мауэ, К. Вестфаль, Теория дифракции, М., «Мир», 1964.