

В. Л. ЗИМОНТ, В. А. САБЕЛЬНИКОВ

МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СВОБОДНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 IX 1974)

В настоящее время предложен ряд модельных уравнений для тензора турбулентных напряжений, содержащих эмпирические постоянные $(^{1-4})$.

Эти уравнения в предельном случае действия на однородную турбулентность быстрой деформации, при которой справедливы точные линейные решения $(^{5-8})$, не переходят в уравнения линейной теории. В настоящей заметке предлагается модель для тензора турбулентных напряжений, допускающая указанный предельный переход. При этом в качестве определяющего параметра используется поле некоторого тензора A_{ij} , являющегося обобщением скалярного параметра, введенного в $(^9)$ для струйных течений, однозначно определяемого тензором деформации среды, и при аппроксимации членов в уравнениях для турбулентных напряжений, описывающих линейное взаимодействие между пульсационными и средними величинами, используются линейные решения соответствующей задачи однородной деформации. Этот путь позволяет значительно уменьшить число эмпирических постоянных.

1. При воздействии на турбулентную среду однородной деформации тензор A_{ij} по определению связан с полем средней скорости соотношением

$$dA_{ij}/dt = \partial U_i / \partial x_j = E_{ij}(t). \quad (1)$$

При этом уравнения для компонент спектрального тензора энергии $\Phi_{ij}(k, t)$ и смешанного спектрального тензора $\Phi_i(k, t)$, полученные применением преобразования Фурье к уравнениям для корреляционных функций, следующих из уравнений движения и диффузии пассивной примеси в несжимаемой жидкости, в линейном приближении и без учета влияния молекулярного переноса имеют вид

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} = E_{\alpha\beta} \frac{\partial k_\alpha \Phi_{ij}}{\partial k_\beta} - E_{i\alpha} \Phi_{\alpha j} - E_{j\alpha} \Phi_{i\alpha} + 2E_{\alpha\beta} \frac{k_\alpha}{k^2} (k_i \Phi_{\beta j} + k_j \Phi_{i\beta}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = E_{\alpha\beta} \frac{\partial k_\alpha \Phi_i}{\partial k_\beta} - E_{\alpha} \Phi_{i\alpha} - E_{i\alpha} \Phi_{\alpha} + 2E_{\alpha\beta} \frac{k_\alpha k_i}{k^2} \Phi_{\beta}, \quad (3)$$

где $E_i = \partial C / \partial x_i$ — составляющие градиента средней концентрации, постоянные по пространству. Полученные из численного решения уравнений (2), (3) компоненты тензора турбулентных напряжений $\langle u_i u_j \rangle$ и вектора потока концентрации $\langle cu_i \rangle$ в случае изотропной начальной турбулентности при отличных от нуля E_{12} и E_2 (однородный сдвиг) приводят к значениям турбулентного числа Прандтля Pr_T и $\langle u_1 u_2 \rangle / \langle u_\alpha u_\alpha \rangle$, соответствующим экспериментальному диапазону значений, если учесть характерные степени деформаций жидких элементов в сдвиговых течениях различных типов, определенные в $(^9)$, см. рис. 1.

2. Когда предположения линейной теории не справедливы, в уравнения (2), (3) добавляются вязкие и нелинейные члены. Использование известных аппроксимаций $(^1, ^{10})$ при больших числах Рейнольдса турбулент-

ности Re_τ для диссипативного и нелинейного членов приводит к уравнениям (здесь мы ограничимся динамической задачей)

$$\frac{d\langle u_i u_j \rangle}{dt} = -E_{i\alpha} \langle u_\alpha u_j \rangle - E_{j\alpha} \langle u_i u_\alpha \rangle + 2E_{\alpha\beta} \int \frac{k_\alpha}{k^2} (k_i \Phi_{\beta j} + k_j \Phi_{i\beta}) d^3 k - A(u^3/L) \delta_{ij} - B \frac{u}{L} (\langle u_i u_j \rangle - u^2 \delta_{ij}), \quad (4)$$

где A и B — эмпирические постоянные, предполагаемые не зависящими от степени деформации среды, L — интегральный масштаб длины турбулентности, $u^2 = \langle u_\alpha u_\alpha \rangle / 3$, $Re_\tau = uL/\nu$.

Масштаб L определим соотношением (в частном случае изотропной турбулентности это определение совпадает с обычным)

$$L = \frac{3\pi}{4} \int k^{-1} \Phi_{\alpha\alpha} d^3 k / \int \Phi_{\alpha\alpha} d^3 k. \quad (5)$$

Из уравнения для Φ_{ij} (2) следует уравнение для масштаба

$$\frac{d(Lu^2)}{dt} = E_{\alpha\beta} \frac{\pi}{4} \left[\int k^{-1} \left(\frac{\partial k_\alpha \Phi_{\gamma\gamma}}{\partial k_\beta} - \Phi_{\beta\alpha} - \Phi_{\alpha\beta} \right) d^3 k + Gu^3 \right], \quad (6)$$

в котором последний член аппроксимирует нелинейный перенос энергии по спектру (можно показать, что при больших значениях Re_τ роль вязкого члена мала), $G = -A/2$ из условия автомодельности вырождения изотропной турбулентности ⁽⁶⁾.

Подынтегральные выражения в уравнениях (4), (6) будем аппроксимировать, исходя из следующего предположения о форме компонент тензора Φ_{ij} в области крупномасштабных вихрей соленоидального поля скорости (именно этой областью определяются указанные интегралы):

$$\Phi_{ij}(k) = a^3 B_{\alpha\beta} [\Delta_{i\alpha} \Phi_{\beta j 0}(ka) + \Delta_{j\beta} \Phi_{i\alpha 0}(ka) + \Delta_{i\beta} \Phi_{\alpha j 0}(ka) + \Delta_{j\alpha} \Phi_{\beta i 0}(ka)], \quad (7)$$

где $\Delta_{ij} = (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$, индекс 0 относится к линейным решениям задачи (2), число a и шесть компонент симметричного тензора B_{ij} находятся из условия совпадения величин L и $\langle u_i u_j \rangle$ (определяемых также крупномасштабной частью спектра), фигурирующих в уравнениях (4) и (6) и следующих из спектрального тензора ⁽⁷⁾.

Соотношение (7) соответствует идее работ ^(11, 9) о том, что пространственная структура турбулентности в реальных течениях с градиентом средней скорости в области крупномасштабных вихрей близка к структуре, которая получается при воздействии на однородную изотропную турбулентность быстрой однородной деформации. (В гипотетическом случае медленной, но продолжительной деформации такая аппроксимация не справедлива, но в этом случае роль линейных членов в (4) мала.)

Подставляя (7) в (4) и (6), получим уравнения, в которых интегралы определяются на основании решения сопутствующей линейной задачи (2) и для изотропной начальной турбулентности аналогично ⁽⁵⁾ не зависят от формы начального спектра.

Эмпирические постоянные можно определить из экспериментальных наблюдений или теоретических исследований вырождения однородной турбулентности. В частности, $A = 1,4 - 0,8$ при $Re_\tau = 60 - 230$ ⁽⁶⁾, $A = 0,4$ при $Re_\tau = 1,5 \cdot 10^3 - 1,3 \cdot 10^4$ ⁽¹²⁾ и согласно расчетам ⁽¹³⁾ $A = 1,1$ при $Re_\tau = 40$.

3. При конкретных численных расчетах поведения однородной турбулентности в потоке, основанных на изложенной выше идее использования линейных решений, принимали ряд допущений, упрощающих вычисления: вводили интегральные масштабы вдоль осей естественной системы коор-

дпнат задачи и по ним определяли средний масштаб, а также вводили аппроксимацию для всех компонент тензора Φ_{ij} (что, вообще говоря, может противоречить условию соленоидальности):

$$L_i \langle u_i^2 \rangle = \pi \int \Phi_{ii} \delta(k_i) d^3k, \quad L = \frac{L_\alpha \langle u_\alpha^2 \rangle}{\langle u_\beta u_\beta \rangle}, \quad \Phi_{ij}(k) = \sqrt{\frac{\langle u_i^2 \rangle \langle u_j^2 \rangle}{\langle u_i^2 \rangle_0 \langle u_j^2 \rangle_0}} \Phi_{ij0}(k). \quad (8)$$

Соотношения (8), в отличие от (5) и (7), являются инвариантными относительно выбора системы координат. Выражение для Φ_{ij} в (8) при $i=j$ является математической формулировкой выводов, сделанных в ^(11, 9) на основании анализа экспериментальных данных по однородной деформации в каналах, в поле однородного сдвига и в неоднородном сдвиговом течении в плоском следе.

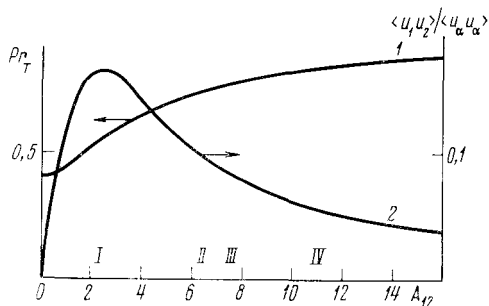


Рис. 1

Рис. 1. I — след, II — струя, III — слой смешения, IV — пограничный слой; 1 — $P_{T1} = \langle u_1 u_2 \rangle E_2 / \langle u_2 \rangle E_{12}$, 2 — $\langle u_1 u_2 \rangle / \langle u_\alpha u_\alpha \rangle$

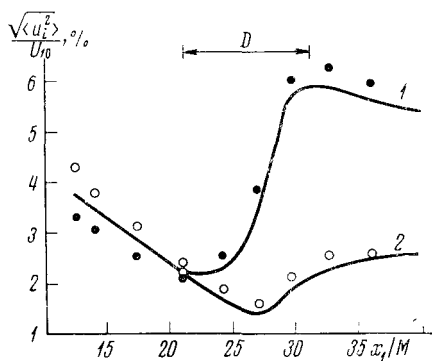


Рис. 2

Рис. 2. $Re_T = 40$; $A = 1,3$; $B = 0,8$. D — участок деформации. $i=2$ (1), 1 (2)

Диссипацию, согласно экспериментальным данным ⁽¹⁴⁾, брали в изотропном виде (что связано, по-видимому, с малыми значениями Re_T в опытах). Диффузией вдоль потока, направленного по оси x_1 пренебрегали. В этом случае упрощенная система уравнений имела вид

$$U_1 \frac{d \langle u_i u_j \rangle}{dx_1} = -E_{i\alpha} \langle u_\alpha u_j \rangle - E_{j\alpha} \langle u_i u_\alpha \rangle + E_{\alpha\beta} [g_{\beta j}^{i\alpha} \sqrt{\langle u_j^2 \rangle} + g_{i\beta}^{\alpha j} \sqrt{\langle u_i^2 \rangle}] \times \\ \times \sqrt{\langle u_\beta^2 \rangle} - B \frac{u}{L} (\langle u_i u_j \rangle - u^2 \delta_{ij}) - A \frac{u}{L} \langle u_i u_j \rangle, \\ U_1 \frac{d(L_i \langle u_i^2 \rangle)}{dx_1} = E_{ii} L_i \langle u_i^2 \rangle - 2E_{i\alpha} f_{\alpha i} L_i \sqrt{\langle u_\alpha^2 \rangle \langle u_i^2 \rangle} - \\ - B \frac{u}{L} (L_i \langle u_i^2 \rangle - L u^2) + G \langle u_i^2 \rangle u, \quad (9)$$

$$g_{im}^{ij} = 2 \int \frac{k_i k_j}{k^2} \Phi_{im0} d^3k \cdot (\langle u_i^2 \rangle_0 \langle u_m^2 \rangle_0)^{-1/2},$$

$$f_{ij} = \int \Phi_{ij0} \delta(k_i) d^3k / \int \Phi_{i i 0} \delta(k_i) d^3k,$$

g и f — функции, определяемые из решения линейной задачи. $E_{ij}(x_1)$, $U_1(x_1)$ находили исходя из одномерной схемы течения в каналах.

Сравнение расчета поведения турбулентных характеристик с экспериментальными данными для течения в канале квадратного сечения перемен-

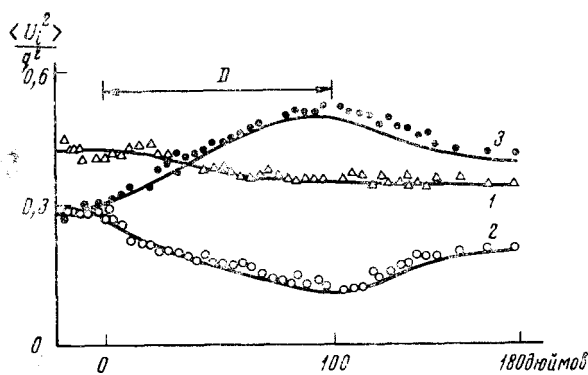


Рис. 3. $Re_\tau=130$; $A=0.9$; $B=1.6$. D — участок деформации. Номера кривых соответствуют значению i в $\langle u_i^2 \rangle / q^2$

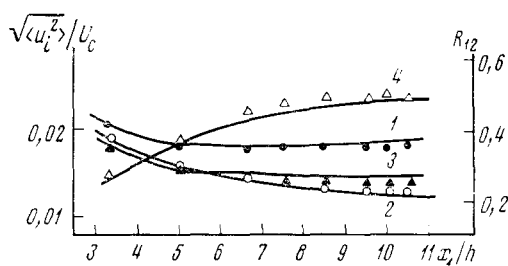


Рис. 4. $Re_\tau=320$; $A=0.6$; $B=1.7$. Номера кривых 1—3 соответствуют значению i в $\langle u_i^2 \rangle^{1/2} / U_c$, 4 — R_{12}

ной площади сечения ⁽¹⁴⁾ канала постоянной площади сечения, но переменной формы ⁽¹⁵⁾, для течения в поле постоянного сдвига средней скорости ⁽¹⁶⁾ приводится на рис. 2—4, здесь приняты обозначения работ ^(14—16).

4. В случае неоднородных свободных потоков в которых поле средней скорости зависит от турбулентных напряжений (струйные течения), необходимо рассматривать уравнения Рейнольдса для средней скорости и в уравнении (9) вводить диффузионные члены. Простейшее допущение состоит в представлении соответствующих диффузионных членов в градиентном виде: турбулентная вязкость ν_t выражаются, например следующим образом ⁽¹⁰⁾: $\nu_t \sim uL$.

Определение в неоднородном потоке поля тензора A_{ij} на основании локальных градиентов средней

скорости является уже не справедливым. Соображения, приведенные в работе ⁽⁹⁾, свидетельствуют о возможности описания поля тензора A_{ij} уравнением диффузионного типа

$$E_{ij} = \frac{DA_{ij}}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\nu_t \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_\alpha} \right).$$

Авторы выражают благодарность В. М. Иевлеву за интерес и поддержку работы при ее выполнении и ценные замечания в процессе обсуждения.

Центральный аэрогидродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
15 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. C. Rotta, Zs. Phys., B. 131, № 1, 51 (1951). ² K. Hanjalic, B. E. Launder, J. Fl. Mech., v. 52, № 4, 609 (1972). ³ B. Daly, F. H. Harlow, Ph. Fluids, v. 13, № 1, 2634 (1970). ⁴ А. А. Павельев, Мех. жидкости и газа, № 1, 38 (1974). ⁵ G. K. Batchelor, J. Proudman, Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 7, № 1, 83 (1954). ⁶ Дж. Бэтчелор, Теория однородной турбулентности М., ИЛ, 1955. ⁷ J. R. A. Pearson, J. Fl. Mech., v. 5, № 2, 274 (1959). ⁸ H. S. Ribner, M. Tucker, NACA, Rep. № 1113, 1953. ⁹ A. A. Townsend, J. Fl. Mech., v. 41, № 1, 13 (1970). ¹⁰ А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. физ. т. 6, № 1—2, 56 (1942). ¹¹ A. A. Townsend, Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 7, № 1, 10 (1954). ¹² A. L. Kistler, T. Vrebalovich, J. Fl. Mech., v. 26, № 1, 37 (1966). ¹³ R. H. Kraichnan, Ph. Fluids, v. 7, № 7, 1030 (1964). ¹⁴ M. S. Uberoi, J. Aeronaut. Sci., v. 23, № 8, 754 (1956). ¹⁵ H. J. Tucker, A. J. Reynolds, J. Fl. Mech., v. 32, № 4, 657 (1968). ¹⁶ F. H. Champagne, V. G. Harris, S. Corrsin, ibid., v. 41, № 1, 81 (1970).

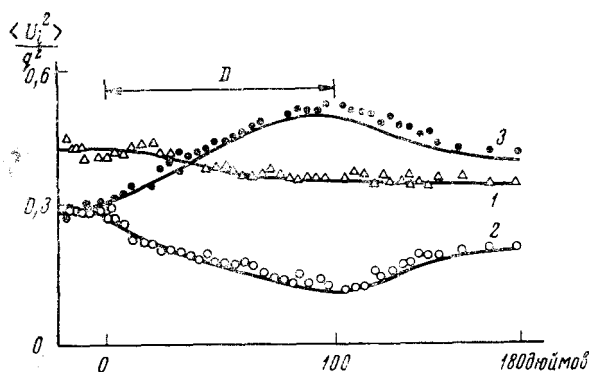


Рис. 3. $Re_\tau = 130$; $A = 0.9$; $B = 1.6$. D — участок деформации. Номера кривых соответствуют значению i в $\langle u_i^2 \rangle / q^2$

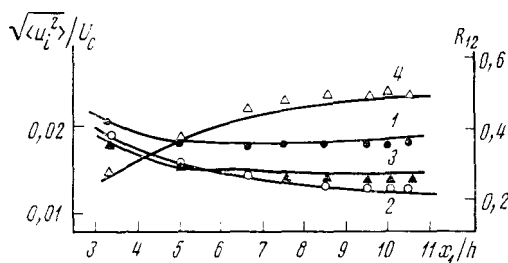


Рис. 4. $Re_\tau = 320$; $A = 0.6$; $B = 1.7$. Номера кривых 1—3 соответствуют значению i в $\langle u_i^2 \rangle^{1/2} / U_c$, 4 — R_{12}

скорости является уже не справедливым. Соображения, приведенные в работе (9), свидетельствуют о возможности описания поля тензора A_{ij} уравнением диффузионного типа

$$E_{ij} = \frac{DA_{ij}}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\nu_T \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_\alpha} \right).$$

Авторы выражают благодарность В. М. Иевлеву за интерес и поддержку работы при ее выполнении и ценные замечания в процессе обсуждения.

Центральный аэрогидродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
15 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. C. Rotta, Zs. Phys., B. 131, № 1, 51 (1951).
- ² K. Hanjalic, B. E. Launder, J. Fl. Mech., v. 52, № 4, 609 (1972).
- ³ B. Daly, F. H. Harlow, Ph. Fluids, v. 13, № 1, 2634 (1970).
- ⁴ А. А. Павельев, Мех. жидкости и газа, № 1, 38 (1974).
- ⁵ G. K. Batchelor, J. Proudman, Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 7, № 1, 83 (1954).
- ⁶ Дж. Бэтчелор, Теория однородной турбулентности М., ИЛ, 1955.
- ⁷ J. R. A. Pearson, J. Fl. Mech., v. 5, № 2, 274 (1959).
- ⁸ H. S. Ribner, M. Tucker, NACA, Rep. № 1113, 1953.
- ⁹ A. A. Townsend, J. Fl. Mech., v. 41, № 1, 13 (1970).
- ¹⁰ А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. физ., т. 6, № 1—2, 56 (1942).
- ¹¹ A. A. Townsend, Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 7, № 1, 104 (1954).
- ¹² A. L. Kistler, T. Vrebalovich, J. Fl. Mech., v. 26, № 1, 37 (1966).
- ¹³ R. H. Kraichnan, Ph. Fluids, v. 7, № 7, 1030 (1964).
- ¹⁴ M. S. Uberoi, J. Aeronaut. Sci., v. 23, № 8, 754 (1956).
- ¹⁵ H. J. Tucker, A. J. Reynolds, J. Fl. Mech., v. 32, № 4, 657 (1968).
- ¹⁶ F. H. Champagne, V. G. Harris, S. Corrsin, ibid., v. 41, № 1, 81 (1970).

ной площади сечения ⁽¹⁴⁾, канала постоянной площади сечения, но переменной формы ⁽¹⁵⁾, для течения в поле постоянного сдвига средней скорости ⁽¹⁶⁾ приводится на рис. 2—4, здесь приняты обозначения работ ^(14—16).

4. В случае неоднородных свободных потоков, в которых поле средней скорости зависит от турбулентных напряжений (струйные течения), необходимо рассматривать уравнения Рейнольдса для средней скорости и в уравнения (9) вводить диффузионные члены. Простейшее допущение состоит в представлении соответствующих диффузионных членов в градиентном виде, турбулентная вязкость ν_T выражаются, например, следующим образом ⁽¹⁰⁾: $\nu_T \sim uL$.

Определение в неоднородном потоке поля тензора A_{ij} на основании локальных градиентов средней