

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Э. И. КАСИМОВ

ОБ ОДНОЙ БАЗИСНОЙ СИСТЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ К ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ
АБЕЛЯ — ГОНЧАРОВА

Пусть система аналитических функций $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_k(z) \in A_R$, $k=0, 1, \dots$, образует базис * в пространстве A_R . Возьмем p , $p \geq 2$, функций $\{\psi_k(z)\}_{k=0}^{p-1}$ из A_R и составим новую систему:

$$\varphi_0(z)\psi_0(z), \varphi_1(z)\psi_1(z), \dots, \varphi_{p-1}(z)\psi_{p-1}(z), \varphi_p(z)\psi_0(z), \dots \quad (1)$$

Относительно базисности системы (1) в пространстве A_R в случае $p=2$ справедлива

Теорема 1. Пусть система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, $\varphi_k \in A_R$, $k=0, 1, \dots$, является базисом в пространстве A_R и функции этой системы удовлетворяют условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(z)|^{1/n} = |z|, \quad \varphi_{2n}(-z) = \varphi_{2n}(z), \quad \varphi_{2n+1}(-z) = -\varphi_{2n+1}(z), \quad (2)$$

$$n=0, 1, \dots$$

Если функции $\psi_0(z)$ и $\psi_1(z)$ принадлежат пространству A_R , то система

$$\varphi_0(z)\psi_0(z), \varphi_1(z)\psi_1(z), \dots, \varphi_{2n}(z)\psi_0(z), \varphi_{2n+1}(z)\psi_1(z), \dots, \quad (3)$$

образует базис в пространстве $A(|z| < \alpha)$, где α есть модуль ближайшего к началу нуля функции

$$\Delta(z) = \psi_0(z)\psi_1(-z) + \psi_0(-z)\psi_1(z).$$

Проведенное утверждение было сформулировано в статье Э. И. Касимова (2) без двух последних условий, фигурирующих в (2). Это было обнаружено И. И. Ибрагимовым, который и исправил доказательство.

Заметим, что для любой функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

из A_R имеет место представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n+1}) z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n} (1+z).$$

Из единственности этого представления следует, что система

$$1, (1+z), z^2, z^2(1+z), \dots, z^{2n}, z^{2n}(1+z), \dots$$

является базисом в A_R при любом R .

Очевидно, в случае $\psi_0(z) = 1 - z^2$ и $\psi_1(z) = 1 - z$ система, соответствующая системе (3), имеет вид

$$1 - z^2, 1 - z^2, z^2(1 - z^2), \dots, z^{2n}(1 - z^2), \dots$$

* Мы придерживаемся обозначений и определений из монографии (1).

Эта система содержит лишь четные степени z и потому не может быть базисом в A_R ни при каком R . Однако в этом случае $\Delta(z) = 2(1-z^2)$ и ближайшими к началу нулями являются точки -1 и $+1$, т. е. $\alpha=1$. Следовательно, теорема 1 не может быть справедливой без условий (2).

Отметим, что теорему 1 * статьи (2) при любом конечном $p \geq 2$ вряд ли можно доказать указанным там рассуждением. Но подобное утверждение другим методом доказано в статье (3). Между тем метод доказательства, предложенный в статье (2), можно использовать при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 2. Если функции $\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_{p-1}(z)$ принадлежат пространству A_R , то система

$$\psi_0(z), z\psi_1(z), \dots, z^{p-1}\psi_{p-1}(z), z^p\psi_0(z), \dots \quad (4)$$

образует базис в пространстве $A(|z| < \delta)$, где δ есть модуль ближайшего к началу нуля функции

$$W(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{p-1}) = \begin{vmatrix} \psi_0(z), & \psi_1(z), & \dots & \psi_{p-1}(z) \\ \psi_0(\omega z), & \omega\psi_1(\omega z), & \dots & \omega^{p-1}\psi_{p-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_0(\omega^{p-1}z), & \omega^{p-1}\psi_1(\omega^{p-1}z), & \dots & \omega^{(p-1)^2}\psi_{p-1}(\omega^{p-1}z) \end{vmatrix},$$

где $\omega = \exp(2\pi i/p)$.

Следствие. Пусть последовательность чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ периодическая по номеру с периодом $p \geq 2$, т. е. такая, что $\lambda_{n+p} = \lambda_n$, $n=0, 1, \dots$

Тогда система $\{z^n e^{\lambda_n z}\}$ образует базис в пространстве A_{δ_0} , где δ_0 — модуль ближайшего к началу нуля функции

$$W(z) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 z}, & e^{\lambda_1 z}, & \dots & e^{\lambda_{p-1} z} \\ e^{\lambda_0 \omega z}, & \omega e^{\lambda_1 \omega z}, & \dots & \omega^{p-1} e^{\lambda_{p-1} \omega z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_0 \omega^{p-1} z}, & \omega^{p-1} e^{\lambda_1 \omega^{p-1} z}, & \dots & \omega^{(p-1)^2} e^{\lambda_{p-1} \omega^{p-1} z} \end{vmatrix},$$

$$\omega = e^{2\pi i/p}.$$

В самом деле, систему $\{z^n e^{\lambda_n z}\}$ можно получить из (4), полагая, что $\psi_0(z) = e^{\lambda_0 z}$, $\psi_1(z) = e^{\lambda_1 z}$, $\dots$, $\psi_{p-1}(z) = e^{\lambda_{p-1} z}$ и в этом случае

$$\Delta_\omega(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{p-1}) = \Delta_\omega(e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, \dots, e^{\lambda_{p-1} z}) = W(z).$$

В силу следствия, функция e^{tz} представляется единственным образом в виде ряда

$$e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n e^{\lambda_n z} \quad (5)$$

при условии, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{1/n} \leq \frac{1}{\delta_0}.$$

Из (5) находим

$$e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n P_k(z) \frac{\lambda_k^{n-k}}{(n-k)!} \right] t^n.$$

Сравнивая это с разложением

$$e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n,$$

получим

$$\sum_{k=0}^n P_k(z) \frac{\lambda_k^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{z^n}{n!}, \quad n=0, 1, \dots$$

Известно (см. (1), стр. 313), что последним соотношениям удовлетворяют многочлены Гончарова, т. е. многочлены

$$P_k(z) = \gamma_k(z) = \int_{\lambda_0}^z dt_1 \int_{\lambda_1}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\lambda_{k-1}}^{t_{k-1}} dt_k, \quad k=1, 2, \dots$$

Таким образом, мы показали, что для функции e^{zt} при $|t| \leq \delta_0$ и $|z| < R$ (R — произвольное постоянное число) имеет место представление

$$e^{zt} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(z) t^k e^{\lambda_k t}, \quad (6)$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n(z)|^{1/n} = \frac{1}{\delta_0}.$$

Равенство (6) было получено другим методом В. Л. Гончаровым (4) (см. также (5)).

Благодаря разложению (6) описывается класс сходимости интерполяционного ряда Абеля — Гончарова с периодической последовательностью узлов.

Теорема 3. Пусть $F(z)$ есть целая функция первого порядка конечного типа σ и заданы числа $A_n = F^{(n)}(\lambda_n)$, $n=0, 1, \dots$, где числа λ_n удовлетворяют условию периодичности, т. е. $\lambda_{n+p} = \lambda_n$, $n=0, 1, 2, \dots$

Если тип σ функции $F(z)$ удовлетворяет условию $\sigma < \sigma_0 \leq \delta_0$, где δ_0 — модель ближайшего к началу нуля функции $W(z)$, то $F(z)$ представляется интерполяционным рядом Абеля — Гончарова

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\lambda_n) \gamma_n(z),$$

равномерно сходящимся в любом конечном круге $|z| < R$, т. е. класс $[1, \delta_0)$ целых функций является классом сходимости интерполяционного процесса Абеля — Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}$ при условии, что $\lambda_{n+p} = \lambda_n$, $n=0, 1, \dots$

Следствие 1. Если $\{\lambda_n\}$ — периодическая по номеру последовательность чисел с периодом $p \geq 2$ и целая функция $F(z)$ из класса $[1, \delta_0)$ удовлетворяет условиям $F^{(n)}(\lambda_n) = 0$, $n=0, 1, \dots$, то $F(z) \equiv 0$.

Следствие 2. Если $\lambda_n = (-1)^n$, $n=0, 1, \dots$, то целая функция $F(z)$ из класса $[1, \pi/4)$ представляется рядом Абеля — Гончарова, равномерно сходящимся в любом конечном круге $|z| < R$.

Последнее утверждение методами теории интерполяции доказано И. И. Ибрагимовым в работе (6) (см. также (1), стр. 440).

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
30 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», М., 1971. ² Э. И. Касимов, ДАН, т. 208, № 5 (1973). ³ Н. И. Нагнибида, Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1971. ⁴ В. Л. Гончаров, Сообщ. Харьков. матем. об-ва, т. 4, № 5 (1932). ⁵ В. Л. Гончаров, УМН, в. 3 (1937). ⁶ И. И. Ибрагимов, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6 (1939).