

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Г. Г. КАЗАРЯН

ОБ ОЦЕНКАХ МОНОМОВ ЧЕРЕЗ ДАННЫЙ МНОГОЧЛЕН И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 10 XII 1974)

Через R_n обозначим n -мерное евклидово пространство действительных векторов (точек) $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\mathbb{Z}^n$ — n -мерное пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами. Если $\xi \in R_n$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, то положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где

$$D_k = \partial / \partial \xi_k, \quad k=1, \dots, n, \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Положим также

$$R_n^{(0)} = \left\{ \xi; \xi \in R_n, \prod_{k=1}^n \xi_k \neq 0 \right\}.$$

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ — данный многочлен с конечным числом отличных от нуля коэффициентов γ_{α} . Положим $(P) = \{\alpha; \alpha \in \mathbb{Z}^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Определение 1 (см. (1)). Многочлен $P(\xi)$ называется гипоеллиптическим, если для всех $v \in \mathbb{Z}^n$, $|v| \neq 0$

$$|D^v P(\xi)| / |P(\xi)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty.$$

В настоящей заметке для данного многочлена $P(\xi)$ мы:

(I) выделяем тот набор мультииндексов $\{v\}$, для которых имеет место неравенство

$$|\xi^v| \leq C(1 + |P(\xi)|) \quad \forall \xi \in R_n \quad (1)$$

с некоторой константой $C > 0$,

(II) получаем характеристики гипоеллиптичности, в том числе характеристику при помощи оценок типа (1).

Отметим в связи с этим, что известно определение эллиптичности многочлена при помощи таких оценок.

Для точной формулировки задач и результатов дадим некоторые определения и обозначения.

Определение 2. Характеристическим многогранником (х.м.) для данного многочлена

$$P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$$

называется наименьший выпуклый многогранник (в $\mathbb{Z}^n$), содержащий все точки $\alpha \in (P)$.

Определение 3. Обозначим через $\mathfrak{R}_i^k$, $i=1, \dots, M_k'$, $k=0, 1, \dots, n-1$, k -мерные грани многогранника $\mathfrak{R}$. k -мерную грань $\mathfrak{R}_i^k$, $1 \leq i \leq M_k'$, $0 \leq k \leq n-1$, многогранника $\mathfrak{R}$ назовем вполне правильной (в.п.),

если среди внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей этой грани имеется хотя бы одна, все координаты которой положительны.

Определение 4. Выпуклый многогранник $\mathfrak{N}$ (в $\bar{Z}^n$) назовем *полным*, если $\mathfrak{N}$ имеет вершины в начале координат и на каждой оси координат $\bar{Z}^n$. Полный многогранник $\mathfrak{N}$ назовем *вполне правильным* (в.п.), если все некоординатные $(n-1)$ -мерные грани этого многогранника вполне правильны.

Обозначим через $\mathfrak{N}_i^k$, $i=1, \dots, M_k$, $k=0, \dots, n-1$, все в.п. грани х.м. $\mathfrak{N}$ многочлена $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ и положим

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}_i^k} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}.$$

Определение 5. Грань $\mathfrak{N}_i^k$, $1 \leq i \leq M_k$, $0 \leq k \leq n-1$, х.м. $\mathfrak{N}$ многочлена $P(\xi)$ назовем *P -регулярной*, если $P^{i,k}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in R_n^{(0)}$. Грани, не являющиеся P -регулярными, будем называть *P -нерегулярными*.

Мы будем рассматривать только многочлены $P(\xi)$ с вещественными коэффициентами и вполне правильными х.м. $\mathfrak{N}$. Легко видеть, что требование вполне правильности х.м. $\mathfrak{N}$ необходимо для гипоеллиптичности многочлена $P(\xi)$.

С. М. Никольским ⁽²⁾ показано, что если для некоторой константы $C > 0$ имеет место оценка

$$1 + |P(\xi)| \geq C \sum_{v \in \mathfrak{N}} |\xi^v| \quad \forall \xi \in R_n, \quad (2)$$

где $\mathfrak{N}$ — в.п. х.м. многочлена $P(\xi)$, то многочлен $P(\xi)$ является гипоеллиптическим. Отметим, что в этой оценке справа присутствуют все мультииндексы $v \in \mathfrak{N}$.

В случае, когда все в.п. грани в.п. х.м. $\mathfrak{N}$ многочлена $P(\xi)$ P -регулярны, В. П. Михайловым ⁽³⁾ доказана справедливость оценки (2). Отсюда и из результатов ⁽²⁾ следует, что такой многочлен является гипоеллиптическим. Этот же результат в других терминах получен Л. Р. Волевицем и С. Г. Гиндикиным ⁽⁴⁾.

В случае наличия P -нерегулярной грани достаточные условия для оценок типа (1) и достаточные условия гипоеллиптичности получены в ^(5, 6) (там же см. и литературу).

Здесь также мы рассматриваем тот случай, когда в.п. х.м. $\mathfrak{N}$ многочлена $P(\xi)$ имеет в.п. P -нерегулярные грани. При этом для простоты рассуждений и записи ограничимся случаем, когда х.м. $\mathfrak{N}$ имеет только $(n-1)$ -мерные P -нерегулярные грани.

Итак, пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ (γ_{α} — действительные числа) — данный многочлен с в.п. х.м. $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_{i_0}^{n-1}$ — единственная в.п. P -нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{N}$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — внешняя нормаль этой грани (тогда $\lambda_i > 0$, $i=1, \dots, n$ и $(\lambda, \alpha) = d_0$ — уравнение $(n-1)$ -мерной гиперплоскости, проходящей через грань $\mathfrak{N}_{i_0}^{n-1}$ (здесь α — текущая точка, $d_0 > 0$ — число, не зависящее от α). Положим

$$\Sigma = \sum_{i_0, n-1} = \{\eta; \eta \in R_n^{(0)}, P^{i_0, n-1}(\eta) = 0\},$$

$$d_1 = \max_{\substack{\alpha \in \mathfrak{N} \setminus \mathfrak{N}_{i_0}^{n-1} \\ \alpha \in (P)}} (\lambda, \alpha), \quad P_{\lambda}(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) = d_1} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}.$$

$$\mathfrak{N}^* = (\mathfrak{N}_{i_0}^{n-1})^* = \{\alpha; \alpha \in \mathfrak{N}, (\lambda, \alpha) \leq d_1\}.$$

Для точек $\eta \in \Sigma$ положим также

$$\mathfrak{A}(\eta) = \{\mu; \mu \in \mathbb{Z}^n, D^{\mu} P^{i_0, n-1}(\eta) \neq 0\},$$

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\eta \in \Sigma} \mathfrak{A}(\eta).$$

На исследуемый многочлен наложим хотя бы одно из следующих двух ограничений:

а) $P_{\lambda}(\eta) \neq 0$ для всех точек $\eta \in \Sigma$;

б) пусть, например, $\lambda_i = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$; тогда для каждой точки $\eta \in \Sigma$ суще-

ствуют окрестность $O(\eta)$, достаточно гладкие функции $q(\xi)$, $r(\xi)$ и натуральное число $m = m(\eta)$ такие, что в $O(\eta)$ имеет место представление

$$P^{i_0, n-1}(\xi) = [q(\xi)]^m \cdot r(\xi), \quad (3)$$

при этом $q(\eta) = 0$, $\partial q(\eta) / \partial \xi_i \neq 0$, $r(\eta) \neq 0$.

З а м е ч а н и е 1. В случае $n=2$ любой λ -однородный многочлен

$$Q(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) = d_0} q_{\alpha} \xi^{\alpha}$$

представляется в виде (3) (см., например, (7)), т. е. при $n=2$ условие б) всегда выполняется.

Следующие предложения дают ответы на поставленные задачи при приведенных выше ограничениях а) или б) на исследуемый многочлен. При этом во всех предложениях предполагается, что х.м. данного многочлена имеет единственную P -нерегулярную грань $\mathfrak{N}_i^{n-1}$, $\mathfrak{N}$ — в.п.

Теорема 1. Пусть многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию а). Для того чтобы для всех точек $v \in \mathfrak{N}^*$ выполнялось неравенство (1), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности каждой точки $\eta \in \Sigma$ выполнялось соотношение

$$P^{i_0, n-1}(\xi) \cdot P_{\lambda}(\xi) \geq 0.$$

Для точек $v \notin \mathfrak{N}^*$ неравенство (1) не может иметь места.

Теорема 2. Пусть многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условиям а) и б). Тогда для того, чтобы многочлен $P(\xi)$ был гипозллиптическим, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

(I) $\mathfrak{N}^*$ — полный многогранник;

(II) $d_0 - d_1 < \min_{\mu \in \mathfrak{A}} (\lambda, \mu)$;

(III) для каждой точки $\eta \in \Sigma$ существует окрестность $O(\eta)$ такая, что в этой окрестности

$$P^{i_0, n-1}(\xi) \cdot P_{\lambda}(\xi) \geq 0.$$

Теорема 3. Пусть многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условиям а), б) Для того чтобы многочлен $P(\xi)$ был гипозллиптическим, необходимо и достаточно одновременное выполнение условий (I) и (II) теоремы 2 и следующего условия:

(III') для некоторой константы $C > 0$

$$1 + |P(\xi)| \geq C \sum_{\mu \in \mathfrak{N}^*} |\xi^{\mu}| \quad \forall \xi \in R_n.$$

Очевидно, теорема 3 является следствием теорем 1 и 2.

З а м е ч а н и е 2. В теоремах 1–3 предполагалось, что х.м. данного многочлена имеет только одну $(n-1)$ -мерную P -нерегулярную грань. Случай наличия многих $(n-1)$ -мерных P -нерегулярных граней рассматривается аналогично, если поставить соответствующие условия на каждую такую грань. При этом множество $\mathfrak{N}^*$ определяется как пересечение множеств $(\mathfrak{N}_i^{n-1})^*$, где $\{\mathfrak{N}_i^{n-1}\}$ — все P -нерегулярные грани.

Замечание 3. В случае, когда исследуемый многочлен $P(\xi)$ не удовлетворяет условию а), т. е. для некоторой точки $\eta \in \Sigma$ также $P_\lambda(\eta) = 0$, в (5) получены достаточные условия, при которых неравенство (1) имеет место для максимально возможного набора мультииндексов. В отмеченном случае в (6) получены достаточные условия гипоеллиптичности. Несмотря на то, что существуют примеры, показывающие, что многочлен $P(\xi)$, не удовлетворяющий условию в) теоремы 3 (см. (6)), не является гипоеллиптическим, нам не удалось установить необходимость этого условия для гипоеллиптичности.

Нам неизвестно также, насколько существенно условие б) для гипоеллиптичности в случае $n > 2$.

Ереванский государственный
университет

Поступило
4 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965. ² С. М. Никольский, ДАН, т. 146, № 4 (1962). ³ В. П. Михайлов, ДАН, т. 164, № 3 (1965). ⁴ Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, Матем. сб., т. 75 (117), № 3, 400 (1968). ⁵ Г. Г. Казарян, Дифференциальные уравнения, т. 5, № 5, 911 (1969). ⁶ Г. Г. Казарян, ДАН, т. 214, № 5, 1016 (1974). ⁷ Г. Г. Казарян, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. 9, № 3, 189 (1974).