

В. Л. АЗАРОВ, Л. Н. ЛУПИЧЕВ, Г. А. ТАВРИЗОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 24 VI 1974)

Теории возмущений линейных операторов (л.о.), используемой в различных разделах математической физики, посвящены монографии ^(1, 2) и многочисленные статьи (неполный перечень журнальных статей о различных аспектах математической теории возмущений л.о. или о ее приложениях см., например, в ⁽²⁾). В настоящей заметке мы формулируем одну общую алгебраическую теорему теории возмущений л.о. и рассматриваем некоторые ее приложения в теории линейных динамических систем (л.д.с.).

1. Пусть H_1', H_2 — произвольные заданные линейные пространства (л.п.) элементов y, f соответственно, A' — невозмущенный л.о., осуществляющий изоморфное отображение некоторого (вообще говоря, не заданного) линейного многообразия (л.м.) $H_1 \subseteq H_1'$ на H_2 ; $\Delta' = \psi' \varphi' (D(\varphi') = H_1', R(\varphi') = D(\psi') = H_3', R(\psi') = R(\Delta'))$ * — произвольная факторизация л.о. возмущения Δ' , удовлетворяющего условию

$$R(\Delta') \subseteq H_2. \quad (1)$$

Пусть также $B' = A' + \Delta'$ и $\chi' = I + \varphi A^{-1} \psi'$ — соответственно возмущенный л.о. и л.о., называемый ниже характеристическим (х.л.о.), определенные на л.п. H_1', H_3' (здесь и ниже символы $\varphi = \varphi'[H_1], A = A'[H_1]$ обозначают сужение соответствующих л.о. на л.м. H_1 **, I — единичный л.о. с $D(I) = R(I) = H_3'$ и $A^{-1} (= G)$ — обратный к A (невозмущенный гриновский) л.о., определенный на H_2). Обозначим также $H_j, H_h (H_j \subseteq H_2; H_h \subseteq H_3')$ л.м. элементов f, h , для которых в л.п. H_1', H_3' соответственно разрешимы возмущенное и характеристическое уравнение

$$B'y' = j; \quad (2)$$

$$\chi'z = h. \quad (3)$$

Справедлива следующая теорема, устанавливающая эквивалентность задачи (2) и характеристической задачи (3).

Теорема 1 (о факторизованном возмущении л.о.). 1) $H_j = H_2$ в том и только в том случае, когда $H_h = H_3'$;

2) независимо от соотношения между л.м. H_j и л.п. H_2 всегда справедливо равенство

$$\{y': B'y' \in H_j\} = \{y: A'y \in H_2\} ***;$$

3) при любом фиксированном $f \in H_2$ решение $y' \in H_1'$ уравнения (2):

а) существует тогда и только тогда, когда при $h = \varphi A^{-1} f$ существует решение $z \in H_3'$ уравнения (3),

* Здесь и ниже $D(C), R(C)$ обозначены соответственно область определения и область значений л.о. C .

** Ниже символом $C = C'[H]$ обозначено сужение л.о. C' на л.м. $H \subseteq D(C')$.

*** $\{y: \mathcal{M}\}$ — краткое обозначение множества элементов y , обладающих свойством $\mathcal{M}$.

б) если оно существует, то единственно тогда и только тогда, когда при $h = \Phi A^{-1}f$ единственно решение $z \in H_3'$ уравнения (3),

в) если оно существует и единственно, то представимо в виде

$$\begin{aligned} y' &= y - A^{-1}\psi'z = y - A^{-1}\psi'(\chi')^{-1}h = [I - A^{-1}\psi'(\chi')^{-1}\Phi]y = \\ &= A^{-1}f - A^{-1}\psi'(I + \Phi A^{-1}\psi')^{-1}\Phi A^{-1}f, \end{aligned} \quad (4)$$

где y — решение невозмущенного уравнения $A'y = f$, z — решение уравнения (3) при $h = \Phi y$, $(\chi')^{-1}$ — обратный к χ' л.о. (операторы χ' и $\chi = \chi'[R(\Phi)]$ обратимы строго совместно),

г) если оно существует, но не единственно, т. е. множество $\{y_0'\} = \ker B' = \{y_0': B'y_0' = \theta_2, y_0' \neq \theta_1\}$ непусто, то все элементы этого множества (и, следовательно, его линейно-независимые элементы) могут быть найдены из соотношения

$$y_0' = -A^{-1}\psi'h_0, \quad (5)$$

где h_0 — элементы (также непустого в этом случае) множества

$$\{h_0\} = \ker(I + \Phi A^{-1}\psi') = \ker \chi' = \{h_0: \chi'h_0 = \theta_3; h_0 \neq \theta_3\},$$

связанные, в свою очередь, с элементами y_0' соотношением

$$h_0 = \Phi y_0' \quad \bullet \quad (6)$$

(здесь $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — нулевые элементы л.п. H_1', H_2', H_3' соответственно).

2. Рассмотрим теперь приложение сформулированной теоремы к анализу определенного ниже класса л.д.с. Пусть $\mathcal{A}$ — л.д.с., принятая за невозмущенную и заданная л.п. $H_2(F_A)$ возможных (в рамках принятого математического описания л.д.с.) входных функций (входов) $f(x)$, л.п. $H_1'(S_A)$ допустимых откликов (выходных функций) $y(x')$ и описывающим л.о. A' , удовлетворяющим всем указанным в начале п. 1 условиям. Носители $S_A \in R'$, $F_A \in R$ л.п. откликов и входов л.д.с. $\mathcal{A}$ определены соответственно равенствами $S_A = \bigcup \text{supp } y(x')$, $y(x') \in H_1'$, $F_A = \bigcup \text{supp } f(x)$, $f(x) \in H_2$, где R' , R — подходящие (быть может, совпадающие) пространства отнесения (например, четырехмерное евклидово пространство — время, фазовое пространство и т. д.), оснащенные соответствующими метриками (или снабженные некоторыми топологиями), чертой сверху в равенствах, определяющих S_A , F_A , обозначены замыкания (например, по введенным в R' , R метрикам).

Для различных конкретных л.д.с. входные (внешние) воздействия $f(x)$ и отклики $y(x')$ могут иметь различную математическую природу: так, например, для систем с распределенным носителем (в этом случае S_A — множество точек R' мощности континуума) $f(x)$, $y(x')$ — например, тензорные (в частном случае скалярные) поля (или плотности полей) над F_A , S_A соответственно (при этом $y(x')$ удовлетворяет обычно некоторым дополнительным, например, краевым, начальным, моментным, гладкостным и прочим условиям, выделяющим л.п. $H_1'(S_A)$); для л.д.с. с дискретным носителем (S_A — фиксированное конечное или счетное множество точек R') $f(x)$, $y(x')$ — например, скалярные или векторные функции (конечной или бесконечной векторной размерности) одной (например, временной) или нескольких локальных, введенных для каждой точки носителя S_A переменных. Пусть также Δ' — л.о. удовлетворяющий условию (1) и описывающий возмущение л.д.с. $\mathcal{A}$ какой-либо другой системой, взаимодействия подсистем $\mathcal{A}$ между собой или, наконец, самодействие в фиксированных подсистемах $\mathcal{A}$. Структура л.д.с. $\mathcal{A}$, т. е. совокупность составляющих $\mathcal{A}$ подсистем и каналов их взаимодействия, в ряде случаев естественно вводится, например, указанием некоторого разбиения носителей S_A , F_A на непересекающиеся подмножества, образованием декартова произведения этих подмножеств и указанием соответствующих представлений л.о. A' , Δ' . В других случаях структуру л.д.с. удобно вводить иными способами.

Отметим специально, что условие (1), выделяющее рассматриваемый класс л.д.с., с физической точки зрения означает, что возмущение Δ' является «непринуждающим», т. е. «включение» возмущения (другими словами, переход от рассмотрения невозмущенной л.д.с. $\mathcal{A}$ к анализу ее возмущенного аналога $\mathcal{B}$) не меняет системы дополнительных условий, выделяющих л.п. $H_1'(S_A)$ ($\equiv D(A') = D(B')$).

Пусть, наконец, (ψ', φ') — произвольно фиксированная факторизующая Δ' пара л.о. ψ', φ' ($\Delta' = \psi' \varphi'$; $D(\varphi') = H_1'(S_A)$, $R(\varphi') = D(\psi') = H_3'(S_\Phi)$, $R(\psi') = R(\Delta') \equiv H_2(F_A)$) и $M(\psi', \varphi'; \{U\})$ — множество факторизаций л.о. Δ'

$$\Delta' = \Psi' \Phi',$$

$$\Psi' = \psi' U^{-1}, \quad \Phi' = U \varphi', \quad (7)$$

порожденное (ψ', φ') и произвольным фиксированным семейством $\{U\}$ обратимых л.о. U ($D(U) = H_3'(S_\Phi)$, $R(U) = H_3'(S_\Phi)$; S_Φ, S_Φ — носители л.п. $H_3'(S_\Phi)$ и $H_3'(S_\Phi)$ соответственно). Среди факторизаций (7) содержатся, в частности, факторизующие пары л.о. вида $(\Psi' = U^{-1}, \Phi = U \Delta')$, $(\Psi' = \Delta' U^{-1}, \Phi' = U)$, порожденные соответственно факторизующими парами (I, Δ') , (Δ', I) и произвольным фиксированным семейством $\{U\}$ л.о. U . Справедливо следствие из теоремы 1:

Следствие 1. Задаче (2) анализа возмущений л.д.с. $\mathcal{B}$ сопоставлено порожденное $M(\psi', \varphi'; \{U\})$ семейство эквивалентных в смысле теоремы 1 характеристических задач

$$\chi'_{\psi'} z_{\psi'} = h_{\psi'}, \quad (8)$$

$$\chi'_{\psi'} = I + \Phi A^{-1} \Psi' = I + U \Phi A^{-1} \psi' U^{-1}, \quad D(\chi'_{\psi'}) = H_3'(S_\Phi), \quad h_{\psi'} = \Phi y.$$

Теорему 1 и следствие 1 удобно использовать в задачах анализа возмущений л.д.с. в тех случаях, когда в выбранной совокупности $M(\psi', \varphi'; \{U\})$ факторизаций можно указать такую факторизующую пару (Ψ', Φ') , что л.п. $H_3'(S_\Phi)$ и носитель S_Φ (оба эти объекта вместе или только какой-либо один из них) оказываются множествами, более бедными (в смысле размерности л.п., мощности, меры или размерности носителя л.п.) по сравнению с л.п. $H_1'(S_A)$ и носителем S_A . Опуская очевидные формулировки следствия 1 для случаев S_Φ мощности или меры меньшей, чем мощность или мера носителя S_A , приведем следующие специальные формы следствия 1.

Следствие 1а. Если R', R'' — соответственно l - и l' -мерные (например, эвклидовы) пространства отнесения, $l, l' < \infty$, S_A (носитель л.д.с. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$) — некоторое k -мерное подмножество R' (например, k -мерное гладкое многообразие в R'), S_Φ — k' -мерное подмножество R'' (например, гладкое k' -мерное многообразие в R''), соответствующее факторизующей паре $(\Psi', \Phi') \in M(\psi', \varphi'; \{U\})$ (M — какое-либо фиксированное множество факторизующих Δ' пар л.о.), и $k' < k$ ($k \leq l, k' \leq l'$), то характеристическая задача (8) с л.о. $\chi'_{\psi'}$, эквивалентная в смысле теоремы 1 задаче (2), локализована в л.п. $H_3'(S_\Phi)$ функций $h_{\psi'} = \Phi y$ над S_Φ — носителем с размерностью, меньшей размерности носителя S_A функций y' исходной возмущенной задачи (2).

Следствие 1б. Если R', R'' — пространства отнесения произвольной размерности, $S_A \equiv R', S_\Phi \equiv R''$ (S_A, S_Φ — носители л.п. $H_1'(S_A), H_3'(S_\Phi)$ соответственно; S_Φ соответствует факторизующей паре $(\Psi', \Phi') \in M$ и $\dim H_3'(S_\Phi) < \infty$, то исходной задаче (2) может быть сопоставлена эквивалентная в смысле теоремы 1 характеристическая задача (8) с оператором $\chi'_{\psi'}$, действующим в л.п. $H_3'(S_\Phi)$ вектор-функций Φy конечной векторной размерности, рассматриваемых над носителем S_Φ .

3. Любую л.д.с. $\mathcal{B}$ можно рассматривать как полученную в результате «включения» различных возмущений в соответствующих невозмущенных (также различных) л.д.с. Рассмотрим наряду с л.д.с. $\mathcal{B}$ заданной л.о.

$B' = A' + \Delta'$ ($D(A') = D(\Delta') = H_1'(S_A)$); $R(\Delta') \subseteq H_2(F_A)$; $A = A'[H_1 \subseteq H_1'(S_A)]$ — обратимое сужение A' на некоторое л.м. $H_1 = A^{-1}H_2(F_A)$), также л.д.с. $\mathcal{B}_1$, заданную л.о. $B_1' = A_1' + \Delta_1'$ ($D(A_1') = D(\Delta_1') = H_{11}'(S_A)$); $R(\Delta_1') \subseteq H_2(F_A)$; $A_1 = A_1'[H_{11} \subseteq H_{11}'(S_A)]$ — обратимое сужение л.о. A_1' на некоторое л.м. $H_{11} = A_1^{-1}H_2(F_A)$). Пусть также л.о. B_1' удовлетворяет условию $B_1'[P(S_A)] = B'[P(S_A)]$, ($P(S_A) = H_1'(S_A) \cap H_{11}'(S_A)$), а в остальном совершенно произволен.

На $P(S_A)$ л.д.с. $\mathcal{B}$, таким образом, могут быть сопоставлены два различных «аддитивных представления» B' , B_1' л.о. B' . Пусть, как и выше, (ψ', φ') , $M(\psi', \varphi'; \{U\})$ — соответственно произвольно выбранная факторизующая Δ' пара л.о. и множество факторизаций Δ' , порожденное (ψ', φ') и произвольным семейством $\{U\}$ обратимых л.о. U , а (ψ_1', φ_1') , $N(\psi_1', \varphi_1'; \{V\})$ — соответственно произвольно выбранная факторизующая Δ_1' пара л.о. и множество факторизаций Δ_1' , порожденное (ψ_1', φ_1') и произвольным семейством $\{V\}$ обратимых л.о. V ($D(\varphi_1') = H_{11}'(S_A)$; $R(\varphi_1') = D(\psi_1') = H_{31}'(S_{\Phi_1})$, $R(\psi_1') = R(\Delta_1') \subseteq H_2(F_A)$; $D(V) = H_{31}'(S_{\Phi_1})$; $R(V) = H_{31}'(S_{\Phi_1})$; $\Phi_1 = V\varphi_1'$, $\Psi_1' = \psi_1'V^{-1}$, $\Delta_1' = \Psi_1'\Phi_1' = \psi_1'\varphi_1'$). Справедливо следствие, отмечающее многообразие представлений л.д.с. $\mathcal{B}$, как системы, возникающей из различных л.д.с. $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ в результате «включения» (также различных) возмущений (Δ', Δ_1') . Мы ограничиваемся ниже формулировкой следствия 2 для простейшего случая $P(S_A) = H_1'(S_A) = H_{11}'(S_A)$.

Следствие 2. При выполнении условия $P(S_A) = H_1'(S_A) = H_{11}'(S_A)$ задаче (2) анализа возмущенной л.д.с. $\mathcal{B}$ могут быть сопоставлены два семейства эквивалентных в смысле теоремы 1 характеристических задач, порожденных множествами $M(\psi', \varphi'; \{U\})$, $N(\psi_1', \varphi_1'; \{V\})$ факторизаций операторов Δ' , Δ_1'

$$\chi'_{Uz_U} = h_U, \quad (9)$$

$$\chi'_{U'} = I + U\varphi A^{-1}\psi'U^{-1}, \quad D(\chi'_{U'}) = H_3'(S_{\Phi});$$

$$\chi'_{Vz_V} = h_V, \quad (10)$$

$$\chi'_{V'} = I + V\varphi_1 A_1^{-1}\psi_1'V^{-1}, \quad D(\chi'_{V'}) = H_3'(S_{\Phi_1}).$$

Институт проблем управления
Москва

Поступило
24 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, Изд. МГУ, 1965. ² Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972.