

В. Н. ПИЛИПЕНКО

О ВОЗМОЖНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

(Представлено академиком Л. Н. Седовым 23 I 1974)

При расчетах турбулентного пограничного слоя широко используются интегральные методы, требующие задания профиля осредненной скорости в параметрическом виде. Известно, что в случае турбулентных течений жидкости у шероховатой стенки, а также при описании слабых растворов полимеров, снижающих трение, с данными опытов удовлетворительно согласуется логарифмический закон, дополненный функцией «следа» ⁽¹⁾

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yv_*}{\nu} + B + \frac{\Pi}{\kappa} W\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad W\left(\frac{y}{\delta}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi y}{\delta}\right), \quad (1)$$

где u — продольная скорость осредненного течения жидкости в пограничном слое, v_* — динамическая скорость на стенке, y — расстояние от стенки, δ — толщина пограничного слоя, $\kappa=0,4$ — константа Кармана, ν — молекулярная вязкость, $W(y/\delta)$ — функция «следа» Коулса. Для течения ньютоновской жидкости у плоской пластины $B \approx 4,9$, $\Pi \approx 0,55$. Случаю течения ньютоновской жидкости у шероховатой стенки отвечают значения параметра $B < 4,9$, а случаю течения жидкости с полимерными добавками — значения $B > 4,9$. При течении в пограничном слое с продольным градиентом давления величина Π меняется вдоль обтекаемой поверхности.

В систему интегральных уравнений расчета пограничного слоя входит соотношение, которое может быть получено из (1) при подстановке значений $y=0$ и $u=U$:

$$\Omega = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\Lambda R V}{\Omega} + B + \frac{2\Pi}{\kappa}; \quad \Omega = \frac{U}{v_*}; \quad \Lambda = \frac{\delta}{L}, \quad V = \frac{U}{U_\infty}, \quad R = \frac{U_\infty L}{\nu}; \quad (2)$$

здесь U — скорость на внешней границе пограничного слоя, U_∞ — скорость набегающего потока, L — характерный размер тела.

При расчетах пограничного слоя функция $V(X)$ известна, и для замыкания системы интегральных соотношений требуется, кроме (2), еще два дополнительных уравнения. Как правило, эти уравнения и начальные условия имеют вполне определенную структуру, а именно:

$$F_i\left(\Omega, \Pi, \Lambda, V, \frac{d\Omega}{dX}, \frac{d\Pi}{dX}, \frac{d\Lambda}{dX}, \frac{dV}{dX}\right) = 0, \quad (3)$$

$$\Phi_i(\Omega, \Pi, \Lambda, V)|_{x=x_0} = 0, \quad i=1, 2,$$

где x — координата, отсчитываемая вдоль поверхности тела.

В этом случае система определяющих соотношений (2) и (3) остается инвариантной при замене переменных вида

$$\Omega_2 = \Omega_1, \quad \Pi_2 = \Pi_1, \quad \Lambda_2 = \Lambda_1, \quad V_2 = V_1, \quad X_2 = X_1, \\ X_{02} = X_{01}, \quad B_2 = B_1 - \alpha/\kappa, \quad R_2 = R_1 \exp \alpha. \quad (4)$$

В наиболее интересных для практики случаях B в (2) обычно мало меняется вдоль обтекаемой поверхности. В связи с этим из формул (4) сле-

дует, что имеется возможность моделирования интегральных параметров турбулентного пограничного слоя, определяемых системой (2) и (3). В частности, распределения указанных параметров вдоль обтекаемой поверхности, реализуемые при течениях слабых растворов полимеров у гладких и шероховатых стенок, можно получить путем пересчета характеристик пограничного слоя в обычной жидкости на гладкой поверхности при измененном числе Рейнольдса. Если молекулярная вязкость жидкости при введении малых добавок полимеров не меняется, то последнее соотношение в (4) будет иметь место при

$$U_{\infty 2} = U_{\infty 1} \exp \alpha_1, \quad L_2 = L_1 \exp \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha. \quad (5)$$

Наиболее часто в расчетах пограничного слоя используется уравнение импульсов. В случае плоского течения оно имеет вид

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U} (H+2) \frac{dU}{dx} = \frac{v_*^2}{U^2}, \quad H = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad (6)$$

где

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \delta_2 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} dy. \quad (7)$$

Из (1), (6) и (7) следует

$$\begin{aligned} (G_1 - \Omega G_2) \Omega \frac{d\Lambda}{dX} + \left(\frac{1}{\kappa} - \Omega G_3\right) \Omega \Lambda \frac{d\Pi}{dX} + (G_1 - 2\Omega G_2) \Lambda \frac{d\Omega}{dX} = \\ = \Omega^2 - \frac{1}{V} \frac{dV}{dX} \Omega \Lambda (3G_1 - 2G_2 \Omega), \end{aligned} \quad (8)$$

$$G_1 = \frac{1}{\kappa} (1 + \Pi), \quad G_2 = \frac{1}{\kappa^2} \left(2 + \frac{10}{\pi} \Pi + 1,5 \Pi^2\right), \quad G_3 = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{10}{\pi} + 3 \Pi\right).$$

Очевидно, что структура полученного уравнения соответствует (3).

Различные методы расчета отличаются обычно выбором второго определяющего уравнения. В некоторых из рассмотренных в (2, 3) методах величина Π в (2) непосредственно связывается с продольным градиентом давления

$$\Pi = A \frac{U \delta}{v_*^2} \frac{dU}{dx} = A \frac{\Lambda}{\Omega^2 V} \frac{dV}{dX}, \quad (9)$$

где $A = \text{const}$. Соотношение (9) также имеет структуру (3). В работах (1, 4) в качестве уравнения для параметра используется уравнение «захвата массы» Хэда (5)

$$\frac{1}{U} \frac{d[U(\delta - \delta_1)]}{dx} = F(H^*), \quad H^* = \frac{\delta - \delta_1}{\delta_2}. \quad (10)$$

Если предположить, как это сделано в (1, 4), что шероховатость поверхности и полимерные добавки не влияют на вид функции $F(H^*)$, то соотношение (10) нетрудно привести к виду (3).

В методе (6), предложенном для расчета пограничного слоя в ньютоновской жидкости, кроме (2) и (6) используется уравнение моментов количества движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{U^2} \frac{d}{dx} \left[U^2 \int_0^{\delta} y \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} dy \right] + \\ + \frac{1}{U} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{d}{dx} \left[U \left(y + \int_0^y \frac{u}{U} dy\right) \right] dy = - \frac{1}{\rho U^2} \tau dy, \end{aligned} \quad (11)$$

требующее задания распределения касательного напряжения $\tau = \tau(y)$. Левая часть равенства (11) с учетом (1) имеет вид (3). Если воспользоваться простейшей моделью турбулентной вязкости

$$\frac{\nu_T}{\nu} = \begin{cases} \chi \eta, & \eta < \eta_0, & \eta = yv./\nu, \\ \chi \eta_0, & \eta \geq \eta_0, & \eta_0 = (\chi/\chi_0) \eta_0, & \eta_0 = \delta v./\nu, \end{cases} \quad (12)$$

то, используя (1) и приближенное равенство $\tau \approx \rho \nu_T du/dy$, можно получить соотношение

$$\frac{1}{L \rho U^2} \int_0^\delta \tau dy = \frac{\Lambda}{\Omega^2} \left[\frac{\chi}{\chi_0} \left(1 + \Pi - \ln \frac{\chi}{\chi_0} \right) + \frac{\Pi}{\pi} \sin \frac{\chi}{\chi_0} \right]. \quad (13)$$

В случае, когда полимерные добавки не влияют на турбулентную вязкость во внешней области пограничного слоя (т. е. $\chi = \text{const}$), из (13) следует, что и правая часть (11) удовлетворяет (3).

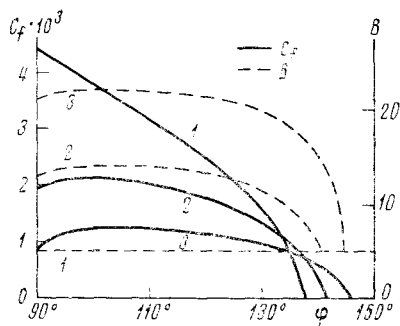


Рис. 1

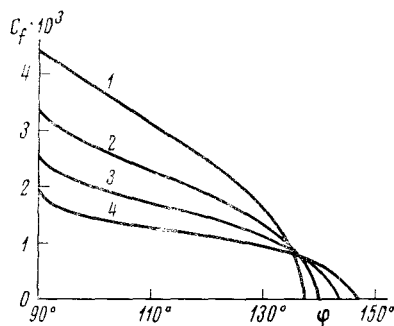


Рис. 2

Рис. 1. Расчет обтекания цилиндра слабым полимерным раствором. $R = 10^6$; 1 — $c = 0$; 2 — $c = 10^{-3}$; 3 — $c = 10^{-2}$; 4 — $c = 10^{-1}$.

Рис. 2. Расчет обтекания цилиндра ньютоновской жидкостью при различных значениях числа Рейнольдса: 1 — 10^6 , 2 — 10^7 , 3 — 10^8 , 4 — 10^9 .

Рассмотрим примеры использования формул пересчета (4).

На рис. 1 приведены результаты расчетов местного коэффициента трения $C_f = 2\Omega^2$, полученные интегрированием системы уравнений (2), (8) и (11) для случая обтекания цилиндра диаметром 50 см раствором полиэтиленоксида WSR-301 различной концентрации (средний молекулярный вес этого полимера $m = 4 \cdot 10^6$). В расчетах было принято значение $\chi = 0,06$. Зависимость параметра B в (2) от молекулярных характеристик полимера, концентрации раствора и режима течения предполагалась такой же, как и в (1). Граничные условия в месте турбулизации пограничного слоя $\phi = 90^\circ$ принимались в виде

$$\delta_2 = \delta_{20}, \quad H = H_0 - \Delta H, \quad \Delta H = 1, 0, \quad (14)$$

где δ_{20} и H_0 соответствуют решению задачи расчета ламинарного пограничного слоя при $\phi = 90^\circ$ (ϕ — угловая координата).

Рис. 2 иллюстрирует результаты расчетов C_f в ньютоновской жидкости для различных значений числа Рейнольдса. Из совместного рассмотрения рис. 1 и 2 следует, что возрастание числа Рейнольдса влияет на местный коэффициент трения C_f таким же образом, как и добавки полимеров при неизменной величине числа Рейнольдса. Отметим, что данные расчетов (рис. 1 и 2) лишь приблизительно согласуются с формулами (4). Это связано с двумя причинами. Во-первых, структура граничного условия для

δ_2 в (14) не удовлетворяет условиям (3). В связи с этим существует участок пограничного слоя, где происходит «подстройка» параметров к условиям (4). Во-вторых, B меняется вдоль поверхности цилиндра при обтекании его полимерным раствором. Эти изменения происходят особенно резко при приближении к месту отрыва (см. рис. 1).

Рассмотрим вопрос о влиянии полимерных добавок на течение в начальном участке канала или трубы. Для определения скорости вдоль внешней границы пограничного слоя служит уравнение сохранения расхода жидкости, которое в случае течения в плоском канале шириной $2a$ имеет вид

$$(a - \delta_1) \frac{dU}{dx} - U \frac{d\delta_1}{dx} = 0. \quad (15)$$

Система уравнений пограничного слоя, дополненная уравнением (15), также инвариантна относительно преобразований (4) при $\alpha_2 = 0$ в (5). Известно ⁽⁷⁾, что в ньютоновской жидкости при возрастании числа Рейнольдса течения длина начального участка увеличивается. Таким образом, можно сделать вывод, что полимерные добавки увеличивают длину начального участка по сравнению с течением ньютоновской жидкости при фиксированном числе Рейнольдса течения. Этот вывод подтверждается данными непосредственных измерений ⁽⁸⁾.

Следующий пример — влияние возмущений в начальных условиях на распределения характеристик пограничного слоя. Течение вблизи шероховатой поверхности соответствует в силу (4) течению жидкости у гладкой стенки с меньшими числами Рейнольдса. Так как при малых R влияние граничных условий сохраняется на больших расстояниях X вдоль тела, то из (4) следует, что у шероховатой поверхности крупномасштабные возмущения сохраняются на больших расстояниях от источника возмущений, в то время как при течении в слабых полимерных растворах должно наблюдаться интенсивное затухание вносимых возмущений.

Важным для практики является вопрос о возможности моделирования (в указанном выше смысле) движения судов с помощью моделей, помещаемых в поток полимерного раствора. Если справедливо предположение, что влияние молекулярной вязкости в турбулентном течении описывается комплексом (2), а весовость может быть учтена в (3) дополнительным параметром $V_\infty^2/(gL)$ (g — ускорение свободного падения), то моделирование возможно. При этом следует рассмотреть подгруппу преобразования (5), которая выделяется условием $\alpha_2 = 2\alpha_1$. Следствием этого условия является равенство чисел Фруда для модели (в жидкости с добавками полимеров) и для натурального объекта (в потоке обычной ньютоновской жидкости). Возможность использования полимерных добавок для моделирования впервые рассматривалась в экспериментальных работах ^(9, 10).

Автор признателен В. А. Иоселевичу за критическое обсуждение результатов.

Научно-исследовательский институт механики
при Московском государственном университете
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Иоселевич, В. Н. Пулипенко, ДАН, т. 243, № 4 (1973). ² S. Hassid, M. Porreh, Intern. Conf. on Drag Reduction, Cambridge, England, 1974. ³ F. L. Testi, J. of Hydronautics, v. 8, № 2 (1974). ⁴ F. A. Dvorak, AIAA J., v. 7, № 9 (1969); Русск. пер. Ракетная техн. и электроника, т. 7, № 9 (1969). ⁵ M. R. Head, Rep. and Mem., № 3152, Aeronautical Res. Council, 1958. ⁶ A. K. Lewkowicz, D. Hoadley et al., AIAA J., v. 8, № 1 (1970); Русск. пер. Ракетная техн. и электроника, т. 8, № 1 (1970). ⁷ С. С. Тугателадзе, А. И. Леонтьев, Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое, М., «Энергия», 1972. ⁸ F. P. Kilian, Hansa, v. 106, № 24 (1969). ⁹ A. Emerson, Trans. of the North-East Coast Institution of Engineering and Shipbuilders, v. 82, № 4 (1965). ¹⁰ T. Kowalski, Naval Engineers J., v. 78, № 2 (1966).