

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

М. А. АТАХОДЖАЕВ

ОБ ОДНОЙ УСЛОВНО-КОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 3 III 1975)

Пусть D_α , $\alpha=1, 2$, — конечные области евклидова пространства E^m , $m \geq 2$, ограниченные поверхностями S_α , $\alpha=1, 2$, причем $D_1 \supset D_2$ и объем $D_2 \neq 0$.

Рассмотрим в $D_1 \setminus D_2$ семейство S_λ , $0 \leq \lambda < 1$, однопараметрических поверхностей, близких к сфере радиуса R с центром в начале координат, задаваемое уравнением вида

$$r = R + \lambda f(\theta), \quad (*)$$

где $f(\theta) = f(\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ — произвольная непрерывная функция, $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i=2, \dots, m-1$.

Обозначим через $C(\bar{D}_1)$ класс функций, непрерывных на $\bar{D}_1 = D_1 \cup S_1$, а через $C^4(D_1)$ — класс функций, непрерывных со всеми частными производными до четвертого порядка включительно.

Задача. Требуется найти аналитическую по λ функцию $u_\lambda(P)$, $P = (P_1, \dots, P_m)$, класса $C^4(D_1) \cap C(\bar{D}_1)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta^2 u_\lambda(P) = 0, \quad P \in D_1; \quad (1)$$

$$u_\lambda(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\theta) \lambda^n, \quad P \in S_\lambda; \quad (2)$$

$$u_\lambda(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\theta) \lambda^n, \quad P \in S_2, \quad (3)$$

где Δ — оператор Лапласа и $\psi_n(\theta)$, $\varphi_n(\theta)$, $n=0, 1, \dots$, — произвольные функции, непрерывные в области изменения аргумента θ .

Задача (1) — (3), вообще говоря, некорректна в классическом смысле ^(1, 2). Поэтому ее исследуем на условную корректность ^(3, 4).

В настоящей работе указывается теорема единственности решения рассматриваемой задачи.

Теорема. Решение задачи (1) — (3) в классе $C^4(D_1) \cap C(\bar{D}_1)$ единственно.

Доказательство. Ищем решение в виде

$$u_\lambda(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta) \lambda^n, \quad (4)$$

где

$$u_n(r, \theta) = u_{1n}(r, \theta) + (R^2 - r^2) u_{2n}(r, \theta),$$

$u_{\alpha n}(r, \theta)$, $\alpha=1, 2$, — произвольные функции, гармонические внутри D_1 .

Тогда на S_λ имеем

$$u_\lambda[R+\lambda f(\theta), \theta] = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^k(\theta) u_{1k}^{(k)}(R, \theta) \lambda^k - \right. \\ \left. - [2R\lambda f(\theta) + \lambda^2 f^2(\theta)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^k(\theta) u_{2k}^{(k)}(R, \theta) \lambda^k \right\}, \quad (5)$$

где

$$u_{\alpha n}^{(h)}(R, \theta) = \frac{\partial^h}{\partial r^h} u_{\alpha n}(r, \theta) |_{r=R}.$$

Теперь, сравнивая (5) с (2) и (4) с (3), приходим к следующим рекуррентным задачам для нахождения гармонических функций $u_{\alpha n}(r, \theta)$, $\alpha=1, 2$; $n=0, 1, 2, \dots$, в D_1 :

$$\lambda^0: u_{10}(R, \theta) = \psi_0(\theta),$$

$$u_{10}[R_2(\theta), \theta] + [R^2 - R_2^2(\theta)] u_{20}[R_2(\theta), \theta] = \varphi_0(\theta);$$

$$\lambda^1: f(\theta) u_{10}^{(1)}(R, \theta) + u_{11}(R, \theta) - 2Rf(\theta) u_{20}(R, \theta) = \psi_1(\theta),$$

$$u_{11}[R_2(\theta), \theta] + [R^2 - R_2^2(\theta)] u_{21}[R_2(\theta), \theta] = \varphi_1(\theta);$$

$$\lambda^2: \frac{1}{2!} f^2(\theta) u_{10}^{(2)}(R, \theta) + f(\theta) u_{11}^{(1)}(R, \theta) + u_{12}(R, \theta) -$$

$$- 2Rf(\theta) u_{21}(R, \theta) - 2Rf^2(\theta) u_{20}^{(1)}(R, \theta) - f^2(\theta) u_{20}(R, \theta) = \psi(\theta),$$

$$u_{12}[R_2(\theta), \theta] + [R^2 - R_2^2(\theta)] u_{22}[R_2(\theta), \theta] = \varphi_2(\theta);$$

$$\lambda^k: \frac{1}{k!} f^k(\theta) u_{10}^{(k)}(R, \theta) + \frac{1}{(k-1)!} f^{k-1}(\theta) u_{11}^{(k-1)}(R, \theta) + \dots$$

$$\dots + f(\theta) u_{1k-1}^{(1)}(R, \theta) + u_{1k}(R, \theta) - \frac{2R}{(k-1)!} f^k(\theta) u_{20}^{(k-1)}(R, \theta) -$$

$$- \frac{2R}{(k-2)!} f^{k-1}(\theta) u_{21}^{(k-2)}(R, \theta) - \dots - 2Rf(\theta) u_{2k-1}(R, \theta) -$$

$$- \frac{1}{(k-1)!} f^k(\theta) u_{20}^{(k-2)}(R, \theta) - \dots - f^2(\theta) u_{2k-2}(R, \theta) = \psi_k(\theta);$$

$$u_{1k}[R_2(\theta), \theta] + [R^2 - R_2^2] u_{2k}[R_2(\theta), \theta] = \varphi_k(\theta),$$

где $r=R_2(\theta)$ — уравнение поверхности S_2 .

В силу единственности решения последних следует доказательство теоремы.

Заметим, что доказанная теорема имеет место также, когда S_1 — произвольная, а S_2 — близкая в смысле (*) к $(m-1)$ -мерной сфере радиуса R с центром в начале координат.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
17 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. А. Агаходжаев, Сб.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, Ташкент, «Фан», 1970, стр. 81. ² М. А. Агаходжаев, Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем. наук, № 6, 3 (1973). ³ М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962. ⁴ М. М. Лаврентьев, Условно-корректные задачи математической физики, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1973.