

И. И. БАВРИН

ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ С ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ n -МЕРНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ S^n

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 6 III 1975)

Важное место в теории интегральных представлений голоморфных функций многих комплексных переменных занимают интегральные представления Темлякова ⁽¹⁻³⁾. Автором ⁽⁴⁾ в случае ограниченных выпуклых полных n -круговых областей D , $n \geq 2$, рассмотрены задачи установления общих интегральных представлений Темлякова, Шварца — Темлякова и Пуассона — Темлякова с определяющим n -мерным многообразием. В настоящей заметке в случае того же класса областей отмечаются новые общие интегральные представления с определяющим n -мерным многообразием. Последние общие интегральные представления еще более полно, чем предыдущие, отражают специфические свойства указанного класса областей. Вместе с тем приводимые общие интегральные представления сохраняют тесную связь с известными интегралами Коши, Шварца и Пуассона одного комплексного переменного.

1. Пусть функция $f=f(z)$, $z=(z_1, \dots, z_n)$, голоморфна в полной n -круговой, $n \geq 2$, области Q с центром в начале координат. Автором ⁽⁵⁾ в случае области Q введены две пары взаимно обратных интегродифференциальных операторов

$$L_{A\bar{A}}^{(k, -\bar{k})}[f], \quad L_{A\bar{A}}^{(-k, \bar{k})}[f]$$

и

$$J_{A\bar{A}}^{(k, -\bar{k})}[\operatorname{Re} f], \quad J_{A\bar{A}}^{(-k, \bar{k})}[\operatorname{Re} f],$$

специфических для области Q .

О п р е д е л е н и е. n -мерное многообразие

$$\{z=(z_1, \dots, z_n): |z_1|=R_1, \dots, |z_n|=R_n; R_1, \dots, R_n > 0\},$$

принадлежащее области $D \in (T)$ или ее границе ∂D , назовем определяющим n -мерным многообразием и обозначим через $E(R_1, \dots, R_n)$ или кратко $E(R)$.

Теорема 1. Пусть $D \in (T)$, функция $f(z)$, $z=(z_1, \dots, z_n)$, $n \geq 2$, голоморфна в D и α — число, равное 0 или 1.

Тогда, если функции $f_v^{(z)}(z)$, $v=1, \dots, n$, и все их частные производные до порядка $\lambda \geq 0$ включительно непрерывны на $E(R)$, то для $k=0, 1, \dots, \lambda$; $\bar{k}=0, 1, 2, \dots$; $z \in D$

$$\begin{aligned} f(z) = & \alpha f(0) + \frac{1}{n+\alpha(1-n)} \sum_{v=1}^n \frac{z_v^\alpha}{(2\pi)^{2n}} \int_0^{+\infty} dt_1 \dots \\ & \dots \int_0^{+\infty} dt_n \int d\omega_\tau \int \mu d\omega_\varphi \int d\omega_\theta \int_{|\xi|=1} L_{\alpha+1, n-1}^{(n-1-\alpha)} \left[L_{A\bar{A}}^{(-k, \bar{k})} \left[\frac{1}{\xi - \bar{u}} \right] \right] \times \\ & \times L_{A\bar{A}}^{(k, -\bar{k})} [F_{\alpha}^{(\alpha)}(\xi, R, \theta)] d\xi^* \cdot \end{aligned} \quad (1)$$

* Об операторе $L_{\alpha+1, n-1}^{(n-1-\alpha)}$ см., например, в ⁽⁶⁾. Другие обозначения см. в ⁽⁷⁾.

В процессе доказательства используется интегральная формула (1) (при $k=0$) из (4), легко устанавливаемая формула

$$\int F_{0v}^{(\alpha)}(\tilde{u}, R, \theta) d\omega_0 = L_{AA}^{(-k, \tilde{k})} \left[\int \left(L_{AA}^{(k, -\tilde{k})} [f_v^{(\alpha)}(z)] \right)_{\substack{z_1 = R_1 \tilde{u} \\ z_2 = R_2 \tilde{u} e^{i\theta_2} \\ \vdots \\ z_n = R_n \tilde{u} e^{i\theta_n}}} d\omega_0 \right]$$

и формула Коши одного комплексного переменного.

З а м е ч а н и е 1. Из формулы (1) видно, что она обладает такой же важной особенностью (связью с интегралом Коши), что и формула (4) из (5).

Из множества следствий, вытекающих из формулы (1), отметим одно:

$$f(z) = \frac{(n-k+\tilde{k}-1)!}{(2\pi)^{2ni}} \int_0^{+\infty} dt_1 \dots \int_0^{+\infty} dt_n \int d\omega_\tau \int \mu d\omega_\varphi \int d\omega_\theta \int_{|\tilde{z}|=1} \frac{\xi^{n-k+\tilde{k}-1}}{(\xi-\tilde{u})^{n-k+\tilde{k}}} \times \\ \times L_{n-k, n-k+\tilde{k}-1}^{(-\tilde{k})} [L_{n-k, n-1}^{(k)} [F_0(\xi, R, \theta)]] d\xi, \quad (2)$$

$$k=0, 1, \dots, \lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq n-1; \quad \tilde{k}=0, 1, 2, \dots *$$

2. Пусть выполняется условие теоремы 1. Полагая $\xi = e^{i\psi}$, $\tilde{u} = \rho e^{i\varphi}$, можно в формуле (1) перейти от $1/(\xi-\tilde{u})$ к $(e^{i\psi}+\tilde{u})/(e^{i\psi}-\tilde{u})$ и к $(1-\rho^2)/(1+\rho^2-2\rho \cos(\psi-\varphi))$ и получить две новые общие интегральные формулы. Первая из них будет иметь вид формулы (1), в которой в правой части добавлено слагаемое

$$\frac{i}{n+\alpha(1-n)} \sum_{v=1}^n z_v^\alpha \operatorname{Im} f_v^{(\alpha)}(0)$$

и вместо интеграла

$$\frac{1}{i} \int_{|\tilde{z}|=1} L_{\alpha+1, n-1}^{(n-1-\alpha)} \left[L_{AA}^{(-k, \tilde{k})} \left[\frac{1}{\xi-\tilde{u}} \right] \right] L_{AA}^{(k, -\tilde{k})} [F_{0v}^{(\alpha)}(\xi, R, \theta)] d\xi \quad (3)$$

стоит интеграл

$$\int_0^{2\pi} L_{\alpha+1, n-1}^{(n-1-\alpha)} \left[L_{AA}^{(-k, \tilde{k})} \left[\frac{e^{i\psi}+\tilde{u}}{e^{i\psi}-\tilde{u}} \right] \right] J_{AA}^{(k, -\tilde{k})} [\operatorname{Re} F_{0v}^{(\alpha)}(e^{i\psi}, R, \theta)] d\psi,$$

вторая — также вид формулы (1), но в которой вместо интеграла (3) стоит интеграл

$$\int_0^{2\pi} J_{\alpha+1, n-1}^{(n-1-\alpha)} \left[J_{AA}^{(-k, \tilde{k})} \left[\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos(\psi-\varphi)} \right] \right] L_{AA}^{(k, -\tilde{k})} [F_{0v}^{(\alpha)}(e^{i\psi}, R, \theta)] d\psi. **$$

В отношении этих двух новых интегральных формул имеет место замечание, аналогичное замечанию 1, но относительно интегралов Шварца и Пуассона.

Из множества следствий, вытекающих из указанных двух новых общих интегральных формул, укажем на одно следствие из первой из них, аналогичное приведенному выше из формулы (1). В этом случае имеет место

* Об участвующих здесь операторах см., например, в (6).

** Об операторе $J_{\alpha+1, n-1}^{(n-1-\alpha)}$ см., например, в (6).

формула, имеющая вид формулы (2), но в которой в правой части добавлено слагаемое $i \operatorname{Im} f(0)$ и вместо интеграла

$$\frac{1}{i} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi^{n-k+\bar{k}-1}}{(\xi-\tilde{u})^{n-k+\bar{k}}} L_{n-k, n-k+\bar{k}-1}^{(-\bar{k})} [L_{n-k, n-1}^{(k)} [F_0(\xi, R, \theta)]] d\xi$$

стоит интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left[2 \left(\frac{e^{i\psi}}{e^{i\psi}-\tilde{u}} \right)^{n-k+\bar{k}} - 1 \right] J_{n-k, n-k+\bar{k}-1}^{(-\bar{k})} [J_{n-k, n-1}^{(k)} [\operatorname{Re} F_0(e^{i\psi}, R, \theta)]] d\psi^*.$$

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
5 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Темляков, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 21, 89 (1957). ² А. А. Темляков, ДАН, т. 120, № 5 (1958). ³ Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962. ⁴ И. И. Баврин, ДАН, т. 221, № 3 (1975). ⁵ И. И. Баврин, ДАН, т. 186, № 2 (1969). ⁶ И. И. Баврин, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской, т. 188, в. 11, 3 (1967). ⁷ И. И. Баврин, ДАН, т. 219, № 3 (1974).

* Об участвующих здесь операторах см., например, в (6).