

П. А. МИШНАЕВСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

(Представлено академиком С. М. Никольским 18 XII 1974)

В настоящей заметке сформулированы теоремы о спектральных свойствах операторов L_j , порожденных операцией $ly = -d^2y/dx^2 + A(x)y$ в $E = L_2(H(x), I, dx)$, где $H(x)$ — переменное гильбертово пространство, $I = (0, \infty)$, $A(x)$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $H \supset H(x)$. Случай $H(x) = H$ изучался в работах W. Jägera и Y. Saito при значительно более сильных, чем у нас, ограничениях на $A(x)$. Заметим, что из полученных нами результатов для оператора Шредингера $-\Delta + Q(x)$ в $L_2(\Omega)$, где Ω — область с бесконечной границей в n -мерном евклидовом пространстве, следуют теоремы об отсутствии точечного спектра и абсолютной непрерывности на $(0, \infty)$, а также о спектральном представлении для более широкого класса областей, граничных условий и меньших ограничениях на потенциал $Q(x)$, чем в работах ⁽²⁻⁸⁾.

Пусть $H, H(x), H_1(x), W_0, W_1, W_0(x), W_1(x)$ — комплексные гильбертовы пространства, $W_0 \subset W_1 \subset H$, W_j плотны в H и непрерывно в него вложены. $P(r)$ — сильно непрерывное семейство ортопроекторов в H , $H(r) = P(r)H^*$, $W_j(r) = P(r)W_j$; $P(r)P(x) = P(x)P(r)$; $E^3(J) = L_2(H(x), J, (1+x)^3 dx)$ **, $\mathfrak{M}(x), \mathfrak{N}(x)$ — операторные функции, отображающие соответственно пространства $W_1(x), W_0(x)$ в $H_1(x)$ и сильно непрерывные на них.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **ф-дифференцируемой** в точке x_0 (ф-непрерывной), если существует элемент $y \in H(x_0)$ такой, что при $h \rightarrow 0$

$$\left| \frac{1}{h} P(x_0) P(x_0+h) (f(x_0+h) - f(x_0)) - y \right|_H \rightarrow 0, \\ (|P(x_0) P(x_0+h) (f(x_0+h) - f(x_0))|_H \rightarrow 0).$$

y называется **ф-производной** в точке x_0 и обозначается $y = f'(x_0)$, или $\partial_\Phi f(x_0)$ ***.

Обозначим через $C^m(J), C_j^m(J), j=0, 1, 2$, пространства функций, имеющих m ф-непрерывных производных и удовлетворяющих, кроме того, следующим граничным условиям в случае $C_j^m(J)$:

- $f(x) \in W_0(x), \partial_\Phi f(x) \in W_1(x)$;
- $\mathfrak{M}(x)f(x) = 0, j=0; F(x)\mathfrak{M}(x)\partial_\Phi f(x) + \mathfrak{N}(x)f(x) = 0, j=1;$
 $(F(x)\mathfrak{M}(x)\partial_\Phi f(x) + \mathfrak{N}(x)f(x), \mathfrak{M}(x)f(x))_{1x} = 0, j=2$ ****.

* В случае, если $A(x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$, $H_1(x) = \prod_{i=1}^m L_2(\partial\Omega_x)$, где $\partial\Omega_x$ — граница области $\Omega(x)$, $H(x) = L_2(\Omega(x))$.

** $(f, g)_{E^3(J)} = \int_J (1+x)^3 (f, g)_x dx$, $(\cdot, \cdot)_x$ — скалярное произведение в $H(x)$, $(u, v)_x = (P(x)u, v)_H, u, v \in H, E^0(J) = E(J), E(J) = E$.

*** $f'(x)$ будет обозначать производную вещественной функции.

**** В дальнейшем $j=i$, где $i=0, 1, 2$, будет означать выполнение соответствующего граничного условия для оператора, порожденного операцией l в E , $l = -\partial_\Phi^2 + A(x)$.

Мы будем предполагать, что эти пространства плотны в $E(J)$.

Предположение I. а) Для любых функций $u(x)$, $w(x)$ со значениями в $W_1(x)$, ф-дифференцируемых в окрестности точки $x_0 \in I$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u(x), w(x))_x|_{x=x_0} &= (\dot{u}(x_0)w(x_0))_{x_0} + (u(x_0), \dot{w}(x_0))_{x_0} + \\ &+ (F(x_0)\mathfrak{M}(x_0)u(x_0), \mathfrak{M}(x_0)w(x_0))_{1x_0}, \end{aligned}$$

здесь $F(x_0)$ — самосопряженный ограниченный оператор в $H_1(x_0)$;

б) $(A(x)u, w)_x = a(u, w)_x + (\mathfrak{N}(x)u, \mathfrak{M}(x)w)_{1x}$, $u \in W_0(x)$, $w \in W_1(x)$, где $a(\cdot, \cdot)_x$ — полуторалинейная симметричная форма ⁽⁹⁾, определенная на $W_1(x)$;

в) $a(u, w)_x = q(u, w)_x + \sum_1^2 \theta_i(u, w)_x$, $u, w \in W_1(x)$, где $q(\cdot, \cdot)_x$ — неотрицательная симметричная форма с областью определения $D(q(\cdot, \cdot)_x) = W_1(x)$, $D(\theta_i(\cdot, \cdot)_x) \supset D(q(\cdot, \cdot)_x)$, $\theta_i(\cdot, \cdot)_x$ — симметричные формы,

$$|\theta_1(u, w)_x| \leq \gamma_0(x) (\sqrt{q(u, u)_x} \sqrt{q(w, w)_x} + N_0 |u|_x |w|_x),$$

$$|\theta_2(u, w)_x| \leq \gamma_1(x) (\sqrt{q(u, u)_x} |w|_x + (1+x)^{-\delta} |u|_x |w|_x),$$

$u, w \in W_1(x)$, $\gamma_0(x)$, $\gamma_1(x)$ — непрерывные функции,

$$|P(x)v|_{W_1(x)} \leq N_0 |v|_{W_1}, \quad v \in W_i, \quad N_1 |w|_{W_1(x)}^2 \leq (|w|_x^2 + q(w, w_x)) \leq N_0 |w|_{W_1(x)}^2,$$

$$\sum_1^2 \int_0^\infty |\theta_i(f, g)_x| dx \leq b \|f\| \|g\| + N \|f\|_E \|g\|_E, \quad f, g \in C_j^1(I), \quad j=0, 1, 2, \quad b < 1,$$

$$\|u\|_J = \int_J (|\partial_\phi u|_x^2 + q(u, u)_x + |u|_x^2) dx,$$

$\|\cdot\|_I = \|\cdot\|$; N_i — постоянные, $N_i > 0$;

г) Для любых $f, g \in C_j^1(J)$, $j=0, 1, 2$, $x \in J$

$$\frac{d}{dx}(q + \theta_1)(f, g)_x = (q + \theta_1)(f, g)_x + (q + \theta_1)(f, \dot{g})_x + (q' + \theta_1')(f, g)_x,$$

где $q'(\cdot, \cdot)_x$, $\theta_1'(\cdot, \cdot)_x$ — симметричные полуторалинейные формы, определенные на $W_0(x)$;

д) Для $x \in I_{R_0} = (R_0, \infty)$:

1) $\mathfrak{M}(x)\partial_\phi w(x) = K(x)\mathfrak{N}(x)w(x)$, $w(x) \in C_0^1(I_{R_0})$, где $K(x)$ — ограниченный самосопряженный оператор в $H_1(x)$;

2) $K(x) \geq 0$, $F(x) \geq 0$ при $j=0$, $F(x) \leq 0$, $j=1, 2$;

3) $x^\varepsilon(q' + \theta_1')(u, u)_x + \varepsilon x^{\varepsilon-1}(q + \theta_1)(u, u)_x - (j-1)(j-2)px^\varepsilon\{(K(x)\mathfrak{N}(x)u, \mathfrak{N}(x)u)_{1x} + 0,5(F(x)K(x)\mathfrak{N}(x)u, K(x)\mathfrak{N}(x)u)_{1x}\} \leq -\varepsilon_0 x^{\varepsilon-1}q(u, u)_x + N_0 x^{\varepsilon-\alpha}\gamma_1(x)|u|_x^2$, $u \in W_0(x)$, $0 \leq p \leq 1$, $\varepsilon_0 > 1$, $1 \geq \varepsilon > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty}(\gamma_0(x) + x\gamma_1(x)) = 0$

или

$$3') \quad \gamma_1(x) \leq \gamma_2(x), \quad \int_0^\infty \gamma_2(x) dx < \infty \quad \text{для } \forall \delta, \delta > 0, \quad N_0 > \gamma_2(x) > N(\delta)/x^{1+\delta},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma_0(x) = 0,$$

$$\int_{x-\theta}^x \gamma_1(r) dr \leq N_0 \theta (\varphi_0^\beta(x) \gamma_2(x) + x^{-\delta_0}),$$

$$\delta_0 > 0, \quad 0 < \theta \leq 1, \quad \beta < 2, \quad \varphi_0^{-2}(x) = \int_x^\infty \gamma_2(r) dr,$$

$$\begin{aligned} & \varphi_0(x) (q' + \theta_1') (u, u)_x + \varphi_0(x) (q + \theta_1) (u, u)_x - (j-1) (j-2) p \varphi_0(x) \times \\ & \times \{ (K(x) \mathfrak{M}(x) u, \mathfrak{M}(x) u)_{1x} + 0,5 (F(x) K(x) \mathfrak{M}(x) u, K(x) \mathfrak{M}(x) u)_{1x} \} \leq \\ & \leq -\varepsilon_0 \varphi_0'(x) q(u, u)_x - \varepsilon_1 \varphi_0(x) q(u, u)_x + N_0 \varphi_0(x) \gamma_1(x) |u|_x^2, \quad u \in W_0(x), \quad \varepsilon_0 > 0, \\ & \varepsilon_1 > 0, \quad 0 \leq p \leq 1; \quad \varepsilon_1 = 0, \end{aligned}$$

если $\varphi_0^{-\alpha}(x) > \gamma_2(x) > \varphi_0^{-\alpha}(x)/x$, $0 \leq \alpha < 3 + \varepsilon_0$, или $q(u, u)_x \leq \gamma_0(x) |u|_x^2 N_0$;

$$4) \quad |(F(x) \mathfrak{M}(x) u, \mathfrak{M}(x) u)_{1x}| \leq N \gamma_0(x) \gamma_1(x) \left(q(u, u)_x + \frac{|u|_x^2}{r^\alpha} \right), \quad j=1.$$

$u \in W_1(x)$;

5) если $v, w \in C_2^1(I_{R_0})$, то

$$\begin{aligned} & (F(x) \mathfrak{M}(x) \partial_\Phi w(x) + \mathfrak{M}(x) w(x), \mathfrak{M}(x) \partial_\Phi w(x))_{1x} = 0; \\ & (F(x) \mathfrak{M}(x) \partial_\Phi w(x) + \mathfrak{M}(x) w(x), \mathfrak{M}(x) v(x))_{1x} = 0, \quad v \in C_2^1(I_{R_0}). \end{aligned}$$

Для $J = (a, b)$ через $C_{0a(b)}^m(J)$, $C_{0a(b)j}^m$ обозначим множество функций из $C^m(J)$, $C_j^m(J)$, обращающихся в 0 в окрестности точки a (b), $\tilde{C}_0^m(J) = C_{0a}^m(J) \cap C_{0b}^m(J)$, $C_{0aj}^m(J) = C_{0aj}^m \cap C_{0bj}^m$.

Через $E_{0j}(J)$ ($E_j(J)$) обозначим гильбертово пространство, являющееся пополнением $C_{0j}^2(J)$ ($C_j^2(J)$) по норме $\|\cdot\|$.

Предположение II. а) Для $j=1, 2$ и любой непрерывно дифференцируемой на I функции $\psi(x)$ $\psi(x)v(x) \in E_{0j}(I)$ ($E_j(I)$), если $v(x) \in E_{0j}(I)$ ($E_j(I)$);

б) Для любого $R, R > 0$, естественное вложение $E_j(0, R)$ в $E(0, R)$ компактно;

в) Если $g(x) \in E_j(J)$, для всех $\varphi \in C_{0j}^2(J)$ $(w, l\varphi)_{E(J)} = (g, \varphi)_{E(J)}$, где $w \in E_j(J)$, то $w \in C_j^2(J)$, $A(x)w \in C^0(J)$ и $lw = g$.

Пусть $D_j = \{\varphi | \varphi \in C^2(I) \cap C^1(\bar{I}) \cap E_{0j}(I), \varphi \in W_0(x), l\varphi \in E, \text{ носитель } \varphi \text{ компактен в } \bar{I} \text{ (}\bar{I} \text{ — замыкание } I\text{)}\}$. Определим операторы M_j следующим образом: $D(M_j) = D_j$, $M_j\varphi = l\varphi$. Через L_j обозначим расширение по Фридрихсу операторов M_j .

Теорема 1. Пусть $(w, (l-\lambda)\varphi)_E = 0$, $w = \text{loc } E_j(\bar{I}) *$ для $\forall \varphi \in C_{0j}^2(I)$, $\lambda > 0$; тогда, если

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x^\varepsilon \{ |\partial_\Phi w|_x^2 + |w|_x^2 \} = 0$$

или

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \varphi_0(x) \{ |\partial_\Phi w|_x^2 + |w|_x^2 \} = 0,$$

$0 < \varepsilon \leq 1$, $\alpha = \delta = 0$, $j = 0, 1, 2$, то $w = 0$ при $x \geq R_1 \geq R_0$, $j = 0$, $w(x) \leq Ne^{-nx}$, $x \geq R(n)$, для $\forall n \in (0, \infty)$, $j = 1, 2$.

Теорема 2. Пусть для $\forall R, R > 0$ на $(0, R) = J_R$ существуют такие постоянные, зависящие только от R , $R \leq R_1$, что для $u, w \in W_1(r)$, $r \in J_R$, выполняются следующие неравенства:

а) $F(r) \geq 0$, $(q' + \theta_1') (u, u)_r - 2(K(r) \mathfrak{M}(r) u, \mathfrak{M}(r) u)_{1r} - (F(r) K(r) \mathfrak{M}(r) u, K(r) \mathfrak{M}(r) u)_{1r} \leq N_1 q(u, u)_r + N_2 |u|_r^2$ или

а') $F(r) \leq 0$, $-(q' + \theta_1') (u, u)_r + 2(K(r) \mathfrak{M}(r) u, \mathfrak{M}(r) u)_{1r} + (F(r) K(r) \mathfrak{M}(r) u, K(r) \mathfrak{M}(r) u)_{1r} \leq N_1 q(u, u)_r + N_2 |u|_r^2$;

б) $|\theta_2(w, w)_r| \leq N_2 (\sqrt{q(w, w)_r} |u|_r + |w|_r |u|_r)$, $\mathfrak{M}(r) \partial_\Phi v(r) = K(r) \mathfrak{M}(r) v(r)$, $v(r) \in C_0^1(J_R)$.

Тогда функция $w(r)$ из теоремы 1 равна 0 при $r \in I$, $j = 0$.

Теорема 3. При выполнении предположений I, II и утверждения теоремы 2 операторы L_j , $j = 0, 1, 2$, имеют абсолютно непрерывный спектр на $(0, \infty)$ ($\alpha = 2\delta = \varepsilon > 0$ — в случае выполнения Iд) 3), $\alpha = \delta = 0$ — в случае Iд) 3'))).

* $\text{loc } E_j(\bar{I}) = \{\varphi | \varphi \in E_j(0, R) \text{ для } \forall R, R > 0\}$.

В качестве примера рассмотрим оператор $-\Delta + Q(x)$ в $L_2(\Omega)$ Ω — область с гладкой границей на плоскости. Предположим, что существует полярная система координат, в которой граница области при $r \geq a_0$ ($a_0 = 0$, $j = 0$, $a_0 > 0$, $j = 1, 2$) задается уравнением $\psi_0(r) \leq \varphi \leq \psi_1(r)$, $\psi_0(r) \geq 0$, $\psi_1(r) - \psi_0(r) \geq t > 0$. Тогда для случая граничных условий $u|_{\partial\Omega} = 0$ или $\partial u / \partial \nu|_{\partial\Omega} = 0$, ν — направление внутренней нормали к границе области Ω , теоремы 1–3 выполняются, если при $r \geq 0$:

1) $Q(x)$ — непрерывная функция,

$$Q(r, \varphi) = Q_1(r, \varphi) + Q_2(r, \varphi), \quad |Q_1(r, \varphi)| \leq N\varphi_0^{-1}(r)\gamma_0(r),$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} Q_1(r, \varphi) \right| \leq N\gamma_1(r), \quad |Q_2(r, \varphi)| \leq N\gamma_1(r)/r^\delta$$

2) Для $n = 0, 1$

$$(-1)^{n+1} \frac{d}{dr} \psi_n(r) \geq 0$$

в случае $u|_{\partial\Omega} = 0$;

$$(-1)^n \frac{d}{dr} \psi_n(r) \geq 0, \quad \left| \frac{d}{dr} \psi_n(r) \right| \leq N\gamma_1(r)r^{-2-\alpha}, \quad n = 0, 1,$$

в случае $\partial u / \partial \nu|_{\partial\Omega} = 0$, $u(a_0, \varphi) = 0$.

В случае $H(x) \equiv H$ теоремы 1–3 выполняются для операторов вида

$$l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{B}{(\ln(1+r))^n} + \sum_1^m \frac{A_j}{r^{p_j}} + V_1(r) + V_2(r);$$

здесь $n > 0$, $p_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, $A_j \geq 0$, $B \geq 0$ (A_j , B , $V_i(r)$ — самосопряженные операторы с плотной в H областью определения $D = D(A_j) = D(B)$, $|V_1(r)| \leq N\varphi_0^{-2}(r)$,

$$\left| \frac{d}{dr} (V_1(r)u, u)_H \right| \leq N\gamma_1(r)|u|_H^2, \quad |V_2(r)| \leq N\gamma_1(r)^*.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Б. М. Левитану за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ W. Jäger, Math. Zs., B. 113, № 1, 68 (1970). ² Y. Saito, Publ. Res. Inst. Math. Sci., v. 7, 581 (1972). ³ Y. Saito, Osaka J. Math., v. 9, 463 (1972). ⁴ X. X. Мурзаин, ДАН, т. 212, № 6, 1301 (1973). ⁵ S. Agmon, J. Anal. Math., v. 23, 1 (1970). ⁶ Д. М. Эйдуис, УМН, т. 24, в. 3, 90 (1969). ⁷ А. Г. Рамм, Матем. сб. т. 66, № 3, 321 (1965). ⁸ А. Я. Повзнер, Матем. сб. т. 32, № 1, 109 (1953). ⁹ Т. Каго, Теория возмущений линейных операторов, М., 1972.

* Из теоремы III работы (4) этот результат следует лишь в случае $B = 0$, $V_2 = 0$, $V_1 \geq 0$.