

УДК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. И. Скрипник

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 16 I 1975)

В работах ^(1, 2) было замечено, что между неполиномиальной квантовой теорией поля в эвклидовой области и классической равновесной статистической физикой непрерывных гиббсовских систем существует тесная связь. Выявление этой связи позволило применить методы классической статистической физики при построении эвклидовых функций Грина без объемного обрезания в неполиномиальных моделях бозонного поля ⁽¹⁻³⁾.

В этой заметке мы покажем, что метод построения функций Грина в одномерных моделях квантовой теории поля можно эффективно использовать при построении корреляционных функций и давления гиббсовской одномерной бесконечной непрерывной системы с определенным парным потенциалом взаимодействия.

Предлагаемый метод построения термодинамических величин представляет собой новый вариант известного матричного метода ⁽⁴⁻⁷⁾.

Рассмотрим гиббсовскую одномерную непрерывную систему с потенциалом $\Phi_{m, \psi}$

$$\Phi_{m, \psi}(x) = \langle \psi, e^{i|x|m} \psi \rangle,$$

где $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p\} \in E^p$, $m = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^p$ — строго диссипативный линейный оператор в E^p , а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — эвклидово скалярное произведение. Такой потенциал удобно назвать p -мерным диссипативным.

Поместим систему в отрезок $[L_1, L_2]$ конечной длины и вычислим большую статистическую сумму $\Xi(L_1, L_2)$ и последовательность корреляционных функций $\{\rho_{(L_1, L_2)}(x_1, \dots, x_m)\}_{m \geq 0}$:

$$\begin{aligned} \Xi(L_1, L_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{L_1}^{L_2} dx_1 \dots dx_n \exp \left[-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi_{m, \psi}(x_i - x_j) \right], \\ \Xi(L_1, L_2) \rho_{(L_1, L_2)}(x_1, \dots, x_m) &= \\ &= \prod_{j=1}^m \chi_{(L_1, L_2)}(x_j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+m}}{n!} \int_{L_1}^{L_2} dx_{n+1} \dots dx_{n+m} \exp \left[-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq n+m} \Phi_{m, \psi}(x_i - x_j) \right], \end{aligned}$$

β — «обратная» температура, z — активность,

$$\chi_{(L_1, L_2)}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [L_1, L_2], \\ 1, & x \in [L_1, L_2]. \end{cases}$$

Центральной проблемой классической статистической механики равновесных систем является проблема нахождения предела корреляционных функций при $L_2 - L_1 \rightarrow \infty$ и предельного давления

$$\lim_{L_2, -L_1 \rightarrow \infty} (L_2 - L_1)^{-1} \ln \Xi(L_1, L_2).$$

Особенность гиббсовской системы с p -мерным диссипативным потенциалом взаимодействия состоит в том, что задача нахождения предельного давления и предельных корреляционных функций может быть сведена к задаче нахождения собственных значений и собственных функций дифференциального оператора второго порядка.

Имеет место

Теорема 1. Если взаимодействие в бесконечной гиббсовской одномерной непрерывной системе определено парным p -мерным диссипативным потенциалом $\Phi_{m, \psi}$, то:

а) давление системы равно наибольшему собственному значению $p_{m, \psi}$ оператора $dp_{m, \psi}$ (наибольшая действительная часть) в пространстве $L^2(\mathbf{R}^p, \exp(-\|q\|^2) dq)$

$$dp_{m, \psi} = \sum_{i,j=1}^p m_{ji} \left(q_j - \frac{1}{2} \frac{d}{dq_j} \right) \frac{d}{dq_i} + \hat{z} \exp \left(i \sqrt{2\beta} \sum_{k=1}^p \psi_k q_k \right),$$

$$\hat{z} = z \exp \left(\frac{\beta}{2} \langle \psi, \psi \rangle \right);$$

б) предельные корреляционные функции существуют при $z, \beta \geq 0$ и равны ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$)

$$\rho(x_1, \dots, x_m) = (\Phi_{(\cdot)}, \exp[i\sqrt{2\beta} Q(\psi)] \prod_{j=2}^m (\exp[(x_j - x_{j-1}) d\hat{p}_{m, \psi}] \times \\ \times \exp[i\sqrt{2\beta} Q(\psi)]) \Phi) \hat{z}^m,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\mathbf{R}^p, \exp(-\|q\|^2) dq)$, Φ ($\Phi_{(\cdot)}$) — единственный собственный вектор оператора

$$d\hat{p}_{m, \psi} = dp_{m, \psi} - p_{m, \psi} (d\hat{p}_{m, \psi}^*),$$

отвечающий нулевому собственному значению, а $Q(\psi)$ — оператор «координаты»,

$$(Q(\psi)f)(q) = \left(\sum_{i=1}^p q_i \psi_i \right) f(q), \quad q = (q_1, \dots, q_p).$$

Доказательство теоремы основывается на том, что в пространстве $L^2(\mathbf{R}^p, e^{-\|q\|^2} dq)$ существует полугруппа класса C^0 $\{P_m^t = \exp(-t dp_m) t \geq 0\}$, заданная квадратично интегрируемыми положительными ядрами $P_m^t(q, q')$, такая, что

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta \sum_{i,j=1}^n \Phi_{m, \psi}(x_i - x_j) \right\} = \int \left(\prod_{j=1}^n \exp[-\|q_j\|^2] dq_j \right) \times \\ \times \exp[i\sqrt{2\beta} \langle q_1, \psi \rangle] \prod_{j=2}^n (P_m^{x_j - x_{j-1}}(q_{j-1}, q_j) \exp[i\sqrt{2\beta} \langle q_j, \psi \rangle]); \quad (1)$$

генератор ее dp_m равен

$$dp_m = \sum_{i,j=1}^p m_{ji} \left(q_j - \frac{1}{2} \frac{d}{dq_j} \right) \frac{d}{dq_i}.$$

Пользуясь равенством (1) и тем, что для возмущенной полугруппы $\{\exp(t dp_{m, \psi}), t \geq 0\}$ справедливо разложение в ряд по ограниченному возмущению ⁽⁸⁾, получим $(L_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \leq L_2)$

$$\Xi(L_1, L_2) = (\Phi_0, \exp[(L_2 - L_1) dp_{m, \psi}] \Phi_0), \quad \Phi_0(q) = 1; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho_{(L_1, L_2)}(x_1, \dots, x_m) &= \frac{\hat{z}^m}{\Xi(L_1, L_2)} (\Phi_0, \exp[(x_1 - L_1) dp_{m, \psi}] \times \\ &\times \exp[iQ(\sqrt{2\beta} \psi)] \cdot \prod_{j=2}^m (\exp[(x_j - x_{j-1}) dp_{m, \psi}] \times \\ &\times \exp[i\sqrt{2\beta} Q(\psi)]) \exp[(L_2 - x_m) dp_{m, \psi}] \cdot \Phi_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть F — преобразование Фурье пространства $L^2(\mathbf{R}^p, \exp(-\|q\|^2) dq)$, тогда оператор $F \exp(t dp_{m, \psi}) \cdot F^{-1}$ имеет строго положительное квадратично интегрируемое ядро при $t > 0, z, \beta \geq 0$. Из теоремы β' ⁽⁹⁾ следует, что семейство операторов $\{F \exp(t dp_{m, \psi}) F^{-1}, t \geq 0\}$ (сопряженное семейство) имеет единственную общую положительную собственную функцию $F\Phi(F\Phi_{(*)})$, которой соответствует положительное наибольшее по модулю собственное значение $\exp(tp_{m, \psi})$.

Предел (в равномерной топологии) оператора $\exp(-tp_{m, \psi}) \cdot F \exp(t dp_{m, \psi}) \cdot F^{-1}, t \rightarrow \infty$, равен $P(F\Phi_{(*)}, F\Phi)$, где $P(\psi, h)f = (\psi, f)h$; поэтому из равенств (2), (3) следует справедливость утверждений (а) и (б) теоремы.

В результате справедлива

Теорема 2. Если гиббсовская одномерная непрерывная система имеет парный p -мерный диссипативный потенциал взаимодействия, то давление $p(z, \beta)$ бесконечной системы является аналитической функцией по z и β при $z, \beta \geq 0$, т. е. в системе отсутствуют фазовые переходы.

Доказательство стандартно ^(4, 6) и основывается на том, что давление является логарифмом невырожденного собственного значения квадратично интегрируемого ядра $(\exp[dp_{m, \psi}]) (q, q')$, которое аналитически зависит от z, β при $z, \beta \geq 0$.

Институт теоретической физики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
9 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. Я. Петрина, В. И. Скрипник, ТМФ, т. 8, 3 (1971). ² D. Fivel, Phys. Rev. D, v. 4, 6 (1971). ³ W. I. Skrypnik, Preprint ITP-72-175E, 1972. ⁴ Van Hove, Physica, v. 16, 137 (1950). ⁵ М. Кас, Phys. Fluids, v. 2, 8 (1959). ⁶ Ю. М. Сухов, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 24 (1971). ⁷ G. Gallavotti, S. Miracle-Sole, J. Math. Phys., v. 11, № 1 (1969). ⁸ Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», 1972. ⁹ М. Г. Крейн, М. А. Рутман, УМН, т. 3, № 1 (23) (1948).