

УДК 517.512.7

МАТЕМАТИКА

С. В. БОЧКАРЕВ

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ РОСТ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОТ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА ОГРАНИЧЕННЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С. М. Никольским 25 II 1975)

В статье устанавливается, что средние арифметические функций Лебега произвольной ортонормированной системы, ограниченной в совокупности, имеют логарифмический рост. Этот результат содержит в себе теоремы А. М. Олевского ^(1, 2) о росте функций Лебега ограниченной ортонормированной системы.

Доказательство указанного факта по существу аналогично доказательству логарифмической оценки снизу для осредненной по сдвигам суммы модулей коэффициентов Фурье по ограниченным ортонормированным системам, установленной автором в работах ^(3, 4).

Через B будем обозначать положительную постоянную, которая может быть различной в разных формулах.

Справедлива

Теорема 1. Если $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная на $[0, 1]$ система функций, $\{a_n\}$ — последовательность чисел и выполняются условия

$$\|f_n\|_{\infty} \leq B, \quad |a_n| \leq B, \quad n=1, 2, \dots, \quad (1)$$

то для любого $n=1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m a_k f_k(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right| dt &\geq \\ &\geq \frac{B \log n}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Приведем схему доказательства этой теоремы. Пусть $2^{N-1} \leq n < 2^N$, $N=1, 2, \dots$. Положим

$$F(y, t) = \begin{cases} a_k f_k(t) & \text{при } \frac{k-1}{2^{N+1}} < y \leq \frac{k}{2^{N+1}}, \quad 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } y \in \left(\frac{n}{2^{N+1}}, 1 \right], \end{cases} \quad (3)$$

$$\Lambda_p(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \in \left[0, \frac{p}{2^{N+1}} \right], \quad p=1, \dots, 2^{N+1}, \\ 0 & \text{при } y \in \left(\frac{p}{2^{N+1}}, 1 \right]. \end{cases} \quad (4)$$

Имеем (см. (3), (4))

$$\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{p=1}^n \left| \sum_{k=1}^p a_k f_k(t) \right| = \sum_{p=1}^n \left| \int_0^1 F(y, t) \Lambda_p(y) dy \right|. \quad (5)$$

Функцию $\Lambda_p(y)$ представим в следующем виде:

$$\Lambda_p(y) = 1 - y - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{k=2^{m+1}}^{2^{m+1}} \chi_k(x) \varphi_k(y) + \lambda(x, y), \quad (6)$$

где $\{\chi_k(x)\}$ — система Хаара, $\{\varphi_k(y)\}$ — система Шаудера (см. (3), стр. 63, 141), x — любая точка интервала $((p-1)/2^{N+1}, p/2^{N+1})$, а функция $\lambda(x, y) = 0$ вне интервала $((p-1)/2^{N+1}, p/2^{N+1})$, и $|\lambda(x, y)| \leq 1$.

Обозначим

$$\begin{aligned} c_k(t) &= \int_0^1 F(y, t) \varphi_k(y) dy, \quad k=2, 3, \dots, \\ c_0(t) &= \int_0^1 F(y, t) (1-y) dy, \\ c_1(x, t) &= \int_0^1 F(y, t) \lambda(x, y) dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Имеют место неравенства (см. (1), (3), (6), (7))

$$\begin{aligned} |c_0(t)| \leq B, \quad |c_k(t)| \leq \frac{B}{2^m} \quad \text{при } 2^m < k \leq 2^{m+1}, \\ \int_0^1 |c_1(x, t)| dx \leq \frac{B}{2^{2N}} \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее используется неоднородное неравенство, дающее оценку снизу нормы в пространстве L_1 ряда по системе Хаара. Это неравенство является частным случаем неоднородных неравенств, установленных в работе автора (4). Справедлива (см. (3))

Л е м м а. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t)$ — ряд по системе Хаара такой, что

$$|\delta_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad x \in [0, 1], \quad (9)$$

где

$$\delta_0(x) = a_1 \chi_1(x), \quad \delta_n(x) = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \chi_k(x), \quad n=1, 2, \dots$$

Тогда выполняется неравенство

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \delta_n^2(x) dx \leq B \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(x) \right| dx. \quad (10)$$

Применение этой леммы дает следующее неравенство (см. (5)–(10)):

$$\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{p=1}^n \left| \sum_{k=1}^p a_k f_k(t) \right| + \left| \sum_{k=1}^p a_k f_k(t) \right| \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq 2^{N+1} \int_0^1 \left| c_0(t) + c_1(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{k=2m+1}^{2^{m+1}} \chi_k(x) c_k(t) \right| dx \geq \\ &\geq B \cdot 2^N \sum_{m=0}^N \sum_{k=2m+1}^{2^{m+1}} c_k^2(t) - B_1 \cdot 2^{-N} \sum_{k=1}^n |a_k|. \end{aligned} \quad (11)$$

Из неравенства (11), учитывая неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right| dt \geq B \cdot 2^{-N} \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

получаем (см. (3), (7), (11))

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^p a_k f_k(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right| dt \geq \\ &\geq B \cdot 2^N \sum_{m=0}^N \sum_{k=2m+1}^{2^{m+1}} \int_0^1 \left(\int_0^1 F(y, t) \varphi_k(y) dy \right)^2 dt \geq \\ &\geq \frac{B}{2^N} \sum_{m=0}^N \sum_{k=2m+1}^{2^{m+1}} \int_0^1 \left| \sum_{p=1}^n a_p f_p(t) \left[\varphi_k \left(\frac{2p-1}{2^{N+2}} \right) \right] \right|^2 dt = \\ &= \frac{B}{2^N} \sum_{m=0}^N \sum_{k=2m+1}^{2^{m+1}} \sum_{p=1}^n a_p^2 \left[\varphi_k \left(\frac{2p-1}{2^{N+2}} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя неравенство (12) к сдвинутым средним

$$2^{-N} \sum_{p=1}^{n+s} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^p a_k^{(s)} f_k^{(s)}(t) \right| dt,$$

где $a_k^{(s)} f_k^{(s)}(t) = a_{k+s} f_{k+s}(t)$ при $k > s$, $a_k^{(s)} f_k^{(s)}(t) = 0$ при $1 \leq k \leq s$, $s = 1, \dots, n$, и суммируя полученные неравенства по s , получим неравенство (2).

Теорема 1 доказана.

Более слабое неравенство с заменой средних арифметических на верхний предел было анонсировано А. М. Олевским ⁽²⁾.

Из теоремы 1 непосредственно следует неравенство

$$\sum_{m=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m a_k f_k(t) \right| dt \geq B \log n \sum_{k=1}^n a_k^2 \left(1 - \frac{k-1}{n} \right).$$

Применяя это неравенство, получаем следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $\{f_n(t)\}$ — ортонормированная система, ограниченная в совокупности.

Тогда для любого $n = 1, 2, \dots$ найдется множество E_n , $|E_n| > B_1 > 0$, такое, что

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^m f_k(x) f_k(t) \right| dt \geq B \log n$$

при всех $x \in E_n$.

Теорема 3. Пусть $\{n_k\}$ — последовательность попарно различных натуральных чисел.

Тогда для всякого $N=1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^N \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^m e^{in_k x} \right| dx \geq B \log N.$$

Теорема 3 устанавливает справедливость в среднем гипотезы Литтлвуда.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. М. Олевский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, 387 (1966). ² А. М. Олевский, УМН, т. 22 (3), 237 (1967). ³ С. В. Бочкарев, Матем. заметки, т. 15, № 3, 363 (1974). ⁴ С. В. Бочкарев, Классы функций и коэффициенты Фурье по полным ортонормированным системам, Докт. дисс., М., 1974. ⁵ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958.