

В. И. БУСЛАЕВ

**НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ
С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

(Представлено академиком С. М. Никольским 20 II 1975)

В заметке получены неравенства для многочленов с вещественными коэффициентами, являющиеся в некотором смысле усилением хорошо известных неравенств С. Н. Бернштейна и С. М. Никольского, а именно доказана следующая

Теорема. Пусть многочлен $P(x)$ представляется в виде $P(x) = Q(x)R(x)$, где

$$Q(x) = \prod_{i=1}^q (x - a_i),$$

$Q(x)$ — вещественный многочлен такой, что $|a_i| \geq 1$, $i=1, \dots, q$, а $R(x)$ — произвольный многочлен степени r .

Тогда для всякого отрезка $[a, b]$, лежащего строго внутри отрезка $[-1, 1]$,

$$\|P'(x)\|_{L_p(a, b)} \leq C(a, b) \mu \|P(x)\|_{L_p(-1, 1)},$$

$$\|P(x)\|_{L_{p'}(a, b)} \leq C(a, b) \mu^{1/p-1/p'} \|P(x)\|_{L_p(-1, 1)}, \quad 1 \leq p < p' \leq \infty,$$

где

$$\mu = r + 1 + \sum_{i=1}^q \frac{1}{|a_i|^2},$$

а $C(a, b)$ зависит только от a и b .

Проиллюстрируем теорему на примере оценки интеграла

$$\int_{-n}^n \frac{|P'(x)|}{\max_{x-1 \leq t \leq x+1} |P(t)|} dx,$$

где $P(x)$ — произвольный вещественный многочлен степени n . Этот интеграл в неявном виде встречается в работе (1), в которой оценивается энтропия бернштейновского класса функций B_σ в некоторой специальной метрике. Из неравенства С. Н. Бернштейна

$$|P'(x)| \leq n \max_{x-1 \leq t \leq x+1} |P(t)|$$

следует только лишь, что

$$\int_{-n}^n \frac{|P'(x)|}{\max_{x-1 \leq t \leq x+1} |P(t)|} dx \leq 2n^2,$$

в то время как из сформулированной выше теоремы следует, что

$$\int_{-n}^n \frac{|P'(x)|}{\max_{x-1 \leq t \leq x+1} |P(t)|} dx \leq C_1 n,$$

где C_1 — абсолютная константа.

Заметим, что утверждение теоремы становится неверным, по крайней мере, в своей первой части, если $Q(x)$ — произвольный, не обязательно вещественный многочлен. Пример:

$$P(x) = \left(1 + \frac{ix}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Первая часть утверждения теоремы для случая $p = \infty$ была доказана в работе (2). Идея доказательства теоремы при $1 \leq p \leq \infty$ состоит в следующем. В зависимости от величины

$$A = \left| \sum_{i=1}^q (1/a_i) \right|$$

рассматриваются два случая. Если A велико по сравнению с μ , а именно, если $A \geq C_1(a, b)\mu$, то, пользуясь вещественностью многочлена $Q(x)$ и неравенствами С. Н. Бернштейна (3) и А. А. Маркова (4), оценивающими рост многочлена $R(x)$ и его производной вне некоторого фиксированного отрезка, нетрудно доказать, что сумма

$$\|P'(x)\|_{L_p(a, b)} + \|P(x)\|_{L_{p'}(a, b)}$$

не превышает $\|P(x)\|_{L_p(-1, 1)}$, если $\text{sign } A = +1$, и не превышает $\|P(x)\|_{L_p(b, 1)}$, если $\text{sign } A = -1$, т.е.

$$\|P'(x)\|_{L_p(a, b)} + \|P(x)\|_{L_{p'}(a, b)} \leq \|P(x)\|_{L_p(-1, 1)}.$$

Если $A \leq C_1(a, b)\mu$, то многочлен $P(x)$ удастся заменить многочленом $\tilde{P}(x)$ степени $C_2(a, b)\mu$ таким, что при $x \in [-1, 1]$

$$^{1/2}|P(x)| \leq |\tilde{P}(x)| \leq ^{3/2}|P(x)|; \quad (1)$$

$$|P'(x)| \leq 2|\tilde{P}'(x)| + C_2\mu|P(x)|. \quad (2)$$

Поэтому в указанном случае утверждение теоремы вытекает из неравенств Н. К. Барн (5) для многочлена $\tilde{P}(x)$, обобщающих неравенства С. Н. Бернштейна и С. М. Никольского:

$$\|\tilde{P}'(x)\|_{L_p(a, b)} \leq C_3(a, b)\mu \|\tilde{P}(x)\|_{L_p(-1, 1)},$$

$$\|\tilde{P}(x)\|_{L_{p'}(a, b)} \leq C_3(a, b)\mu^{1/p-1/p'} \|\tilde{P}(x)\|_{L_p(-1, 1)}, \quad 1 \leq p < p' \leq \infty.$$

Построение многочлена $\tilde{P}(x)$, удовлетворяющего неравенствам (1) и (2), опирается на следующую лемму.

Лемма. Пусть все корни $a_1, \dots, a_q$ произвольного многочлена $Q(x)$ таковы, что $|a_i| \geq d$, $i=1, \dots, q$.

Тогда при $k=1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$\left| \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{a_i} \right)^k \right| \leq \frac{m}{d^k},$$

$$|Q^{(k)}(0)| \leq |Q(0)| \frac{m(m+1) \dots (m+k-1)}{d^k},$$

где

$$m = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^q \frac{d}{a_i} \right|, \sum_{i=1}^q \left| \frac{d}{a_i} \right|^2 \right\}.$$

Итак, теорема доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Буслаев, А. Г. Витушкин, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 38, № 4, 867 (1974). ² В. И. Буслаев, Там же, т. 39, № 2, 173 (1975). ³ С. Н. Бернштейн, Собр. соч., т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1952, стр. 21. ⁴ А. А. Марков, Избр. тр., М.—Л., ОГИЗ, 1948, стр. 55. ⁵ Н. К. Вари, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, № 2, 159 (1954).