

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Т. Г. ГЕНЧЕВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА С. Н. БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 12 XII 1974)

Основной теоремой, доказанной в этой заметке, является следующая
Теорема 1. *Предположим, что $S(\theta)$ и $T(\theta)$ — тригонометрические полиномы степени, не превосходящей n , и*

$$T(\theta) = \sum_{v=-n}^n a_v e^{iv\theta}, \quad a_{-n} \neq 0,$$

не имеет нулей в полуплоскости $\text{Im } \theta \geq 0$.

Пусть $f(z)$ — алгебраический многочлен с действительными коэффициентами, корни которого находятся в области, определенной неравенством

$$y^2 \leq \frac{x^2}{2n-1} + \frac{n}{2}, \quad z = x + iy.$$

Тогда, если для всех действительных θ выполняется неравенство $|S(\theta)| < |T(\theta)|$, то в полуплоскости $\text{Im } \theta \geq 0$ имеем

$$\left| f\left(\frac{d}{d\theta}\right) S(\theta) \right| < \left| f\left(\frac{d}{d\theta}\right) T(\theta) \right|. \quad (1)$$

Это неравенство, очевидно, обобщает классическое неравенство С. Н. Бернштейна ⁽¹⁾ и в качестве частных случаев содержит несколько известных результатов. Например, полагая $T(\theta) = Me^{-in\theta}$, получаем результат К. Дочева ⁽²⁾.

Как несколько неожиданное следствие теоремы 1 получается аналог классической теоремы Гаусса о корнях производной многочлена.

Теорема. *Если корни тригонометрического полинома*

$$T(\theta) = \sum_{v=-n}^n a_v e^{iv\theta}, \quad a_{-n} a_n \neq 0,$$

лежат в некоторой выпуклой области, то и корни производной $T'(\theta)$ находятся в той же самой области.

В основе доказательства теоремы 1 лежит «принцип сравнения», который неявно содержится в замечательной работе Де Брейна ⁽³⁾. Этот принцип можно выразить в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Предположим, что $\mathcal{H}$ — замкнутое множество в комплексной плоскости C и $\mathfrak{M}$ является комплексным линейным пространством мероморфных функций с полюсами в $\mathcal{H}$. Пусть $\mathfrak{N}$ — та часть $\mathfrak{M}$, которая состоит из всех функций, не имеющих нулей вне $\mathcal{H}$, а L — линейный оператор, действующий из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$. В таком случае неравенство*

$$|L(f)(z)| < |L(g)(z)|, \quad z \in C \setminus \mathcal{H}, \quad f \in \mathfrak{M}, \quad g \in \mathfrak{M},$$

является следствием неравенства $|f(z)| < |g(z)|$, $z \in C \setminus \mathcal{H}$, тогда и только тогда, когда $L(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть $|f(z)| < |g(z)|$ в $C \setminus \mathcal{H}$. Предположим, что $L(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$, но несмотря на это существует $z_0 \in C \setminus \mathcal{H}$ такое, что

$$|L(f)(z_0)| \geq |L(g)(z_0)|.$$

Введем отношение $\lambda = L(f)(z_0)/L(g)(z_0)$ (очевидно, $g \in \mathfrak{N}$, так что $L(g)(z_0) \neq 0$). Поскольку $|\lambda| \geq 1$, функция $f - \lambda g$ содержится в $\mathfrak{N}$. Следовательно, $L(f - \lambda g) \in \mathfrak{N}$, чего не может быть, потому что $L(f - \lambda g)(z_0) = 0$. Таким образом, достаточность условия $L(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$ доказана. Необходимость получается из рассмотрения пары f, g , где $f \equiv 0$, а g — произвольный элемент $\mathfrak{N}$.

Следующая лемма является простым, но типичным применением теоремы 3.

Лемма 1. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ — алгебраические многочлены, для которых $|P(z)| < |Q(z)|$ в полуплоскости $H: \operatorname{Im} z \geq 0$ и, кроме того, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)/Q(z)| < 1$.

Тогда в H выполняется неравенство

$$|P'(z) - \gamma P(z)| < |Q'(z) - \gamma Q(z)|, \quad \operatorname{Im} \gamma \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ — полуплоскость $\operatorname{Im} z \leq -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ столь малое, что неравенство $|P(z)| < |Q(z)|$ выполняется в $C \setminus \mathcal{H}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ комплексное пространство всех многочленов, а через $\mathfrak{N}$ — множество многочленов с нулями в $\mathcal{H}$. Как хорошо известно ⁽⁴⁾, для оператора $L(f) = f'(z) - \gamma f(z)$, $\operatorname{Im} \gamma \geq 0$ имеем $L(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$, так что лемма вытекает непосредственно из теоремы 2.

В качестве приложения леммы 1, получаем простое доказательство следующей известной ⁽⁵⁾ теоремы.

Теорема 3. Пусть корни алгебраического многочлена $f(z)$ находятся в полуплоскости $H: \operatorname{Im} z \geq 0$ и пусть

$$S(\theta) = \sum_{v=-n}^n b_v e^{iv\theta}, \quad T(\theta) = \sum_{v=-n}^n a_v e^{iv\theta}, \quad a_{-n} \neq 0.$$

Если $T(\theta) \neq 0$ в H и если неравенство $|S(\theta)| < |T(\theta)|$ выполняется для всех действительных θ , то имеем

$$\left| f\left(\frac{d}{d\theta}\right) S(\theta) \right| < \left| f\left(\frac{d}{d\theta}\right) T(\theta) \right|, \quad \operatorname{Im} \theta \geq 0.$$

Доказательство. Прежде всего, отображая $H: \operatorname{Im} \theta \geq 0$ в единичный круг с помощью подстановки $w = e^{i\theta}$ и применяя принцип максимума, убеждаемся, что неравенство $|S(\theta)| < |T(\theta)|$ выполнено во всей полуплоскости H . Далее, возьмем произвольное $\alpha \in H$ и рассмотрим полиномы $S_1(\theta) = S(\theta + \alpha)$, $T_1(\theta) = T(\theta + \alpha)$, для которых на основании сказанного имеем

$$|S_1(\theta)| < |T_1(\theta)|, \quad \theta \in H. \quad (2)$$

Полагая $z = \operatorname{tg}^{1/2} \theta$, получаем

$$S_1(\theta) = \frac{P(z)}{(1+z^2)^n}, \quad T_1(\theta) = \frac{Q(z)}{(1+z^2)^n}, \quad (3)$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — алгебраические многочлены степени $\leq 2n$. Так как $z = \operatorname{tg}^{1/2} \theta$ отображает H в $H \setminus \{i\}$ и, как легко видеть, $Q(i) = a_{-n} e^{-in\alpha} \neq 0$, то $Q(z)$ не имеет нулей в H . Наконец, на основании (2) имеем $|P(z)| < |Q(z)|$, $z \in H$. Так как, с другой стороны,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{S(\pi + \alpha)}{T(\pi + \alpha)} \right| < 1,$$

все условия леммы 1 выполнены. Применяя эту лемму, получим

$$|P'(z) - 2\gamma P(z)| < |Q'(z) - 2\gamma Q(z)|, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad \operatorname{Im} 2\gamma \geq 0,$$

откуда, полагая $z=0$ и выражая производные $P'(z)$ и $Q'(z)$ через $S_1'(\theta)$ и $T_1'(\theta)$ с помощью (3), находим

$$|S'(\alpha) - \gamma S(\alpha)| < |T'(\alpha) - \gamma T(\alpha)|, \quad \operatorname{Im} \gamma \geq 0, \quad (4)$$

для всех α из H .

Применяя (4) несколько раз, завершаем доказательство теоремы, так как $f(z)$ — произведение линейных множителей рассмотренного типа.

Теорема 4. Пусть $S(\theta)$ и $T(\theta)$ — тригонометрические полиномы из предыдущей теоремы, а $f(z)$ — вещественный алгебраический многочлен с нулями в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq (n/2)^{1/2}$.

Тогда в полуплоскости H : $\operatorname{Im} \theta \geq 0$ имеет место неравенство

$$\left| f\left(\frac{d}{d\theta}\right) S(\theta) \right| < \left| f\left(\frac{d}{d\theta}\right) T(\theta) \right|.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему в частных случаях $f(z) = z - \gamma$, γ — вещественное и $f(z) = (z - \gamma)(z - \bar{\gamma})$, где $|\operatorname{Im} \gamma| \leq (n/2)^{1/2}$ и $\bar{\gamma}$ — сопряженное γ число.

Пусть $h(z) = z^2 + 2bz + c$ — квадратный трехчлен с вещественными корнями. Как и выше, при помощи (3) введем многочлены $P(z)$ и $Q(z)$. Применяя два раза лемму 1, получим

$$\left| h\left(\frac{d}{dz}\right) P(z) \right| < \left| h\left(\frac{d}{dz}\right) Q(z) \right|, \quad \operatorname{Im} z \geq 0,$$

откуда, опять выражая производные $P^{(k)}(z)$ и $Q^{(k)}(z)$, $k=0, 1, 2$, через $S_1^{(k)}(\theta)$ и $T_1^{(k)}(\theta)$ и полагая $z=0$, находим

$$\begin{aligned} & \left| S''(\alpha) + bS'(\alpha) + \left(\frac{c}{4} + \frac{n}{2}\right) S(\alpha) \right| < \\ & < \left| T''(\alpha) + bT'(\alpha) + \left(\frac{c}{4} + \frac{n}{2}\right) T(\alpha) \right|. \end{aligned}$$

Но это доказывает теорему, так как $\alpha \in H$ — произвольное и каждый трехчлен вида $(z - \gamma)(z - \bar{\gamma})$, $|\operatorname{Im} \gamma| \leq (n/2)^{1/2}$ можно представить в виде

$$z^2 + bz + \frac{c}{4} + \frac{n}{2}, \quad b^2 \geq c.$$

Чтобы доказать теорему 1, мы нуждаемся в следующем обобщении известной теоремы Пулепа — Эрмита.

Теорема 5. Пусть корни алгебраического многочлена $g(z)$ степени n лежат в полосе Ω : $p \leq \operatorname{Im} z \leq q$, а корни вещественного многочлена $f(z)$ — в множестве G_n : $|\sin \varphi| \leq n^{-1/2}$, где $\varphi = \arg z$.

Тогда и корни многочлена $f(d/dz)g(z)$ находятся в Ω .

В этом виде теорема 5 доказана Дочевым ⁽⁶⁾. Случай, когда Ω действительная ось плоскости z , рассмотрен ранее Н. Обрешковым ⁽⁷⁾.

Доказательство теоремы 1. Так как $f(z)$ — произведение линейных и квадратных множителей, то, учитывая теорему 5, можно ограничиться рассмотрением случая, когда $f(z)$ — вещественный квадратный трехчлен с нулями в области

$$D: \frac{n}{2} \leq y^2 \leq \frac{x^2}{2n-1} + \frac{n}{2}, \quad z = x + iy.$$

$$h(z) = z^2 - 2\rho z \cos \varphi + \rho^2, \quad \cos^2 \varphi \geq \frac{2n-1}{2n}, \quad \rho \geq 0,$$

корни которого находятся в множестве G_{2n} : $|\sin(\arg z)| \leq (2n)^{-1/2}$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — пространство алгебраических многочленов степени, не превосходящей $2n$, а $\mathfrak{K}$ — множество многочленов из $\mathfrak{M}$ с корнями в полуплоскости $\mathcal{H}$: $\operatorname{Im} z \leq -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ столь малое, что неравенство $|P(z)| < |Q(z)|$ ($P(z)$ и $Q(z)$ — опять многочлены из (3)) выполняется в $C \setminus \mathcal{H}$. Пользуясь теоремой 5 в случае $\Omega = \mathcal{H}$ и теоремой 2, получаем

$$\left| h\left(\frac{d}{dz}\right) P(z) \right| < \left| h\left(\frac{d}{dz}\right) Q(z) \right|, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \quad (5)$$

Полагая $z=0$ в неравенстве (5) и выражая, как и выше, производные многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ через производные $S_1(\theta)$ и $T_1(\theta)$, находим

$$\begin{aligned} & \left| S''(\alpha) - \rho \cos \varphi S'(\alpha) + \left(\frac{n}{2} + \frac{\rho^2}{4} \right) S(\alpha) \right| < \\ & < \left| T''(\alpha) - \rho \cos \varphi T'(\alpha) + \left(\frac{n}{2} + \frac{\rho^2}{4} \right) T(\alpha) \right|. \end{aligned}$$

Этим теорема доказана, поскольку α — произвольное число полуплоскости $\operatorname{Im} \theta \geq 0$ и каждый вещественный квадратный трехчлен с нулями в $\mathcal{D}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} & a \left(z^2 - \rho z \cos \varphi + \frac{n}{2} + \frac{\rho^2}{4} \right), \\ & \rho \geq 0, \quad \cos^2 \varphi \geq \frac{2n-1}{2n}, \quad a = \text{const} \neq 0. \end{aligned}$$

Теперь мы готовы доказать сформулированный в начале заметки аналог теоремы Гаусса.

Итак, пусть корни полинома

$$T(\theta) = \sum_{v=-n}^n a_v e^{iv\theta}, \quad a_{-n} a_n \neq 0,$$

находятся в замкнутой выпуклой области G . Нужно показать, что и корни производной $T'(\theta)$ лежат в G . Так как $T(\theta)$ — периодическая функция, G — полоса вида $a \leq \operatorname{Im} \theta \leq b$.

Пусть θ_0 — произвольное число полуплоскости $\operatorname{Im} \theta > b$. Беря $f(z) = z$ и применяя теорему 1 к полиномам $S(\theta) \equiv 0$ и $N(\theta) = T(\theta + \theta_0)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} \theta \geq 0$, получаем $0 < |N'(0)| = |T'(\theta_0)|$, которое показывает, что $T'(\theta) \neq 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im} \theta > b$. Случай $\operatorname{Im} \theta < a$ сводится к уже рассмотренному подстановкой $r = -\theta$.

Более подробным анализом можно показать, что $T'(\theta)$ может иметь корень, лежащий на одной из контурных прямых G и не являющийся корнем $T(\theta)$, только когда все корни $T(\theta)$ находятся на той же самой прямой.

Софийский университет
Болгария

Поступило
16 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Собр. соч., т. 1, М., 1952, стр. 335. ² К. Дочев, ДАН, т. 146, 1 (1962). ³ N. G. De Bruijn, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 50 (1947). ⁴ М. Марден, Geometry of Polynomials, AMS, Providence, 1966, p. 81. ⁵ Б. Я. Левин, Распр. корней целых функций, М., 1956. ⁶ К. Дочев, Изв. Мат. Ин-та Болгарск. АН, т. 6 (1962). ⁷ Н. Обрешков, Там же, т. 4, 2 (1960).