

УДК 539.3/5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Е. Б. ХАИТ

# ДИНАМИКА РАЗРУШЕНИЯ ВОЛОКНА В АРМИРОВАННОМ МАТЕРИАЛЕ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 31 I 1975)

Вопросы распределения напряжений в армированных материалах обычно исследуются на статических моделях. Между тем разрыв волокна является динамической задачей, так как при разрыве напряжения меняются во времени. Цель настоящей работы состоит и в том, чтобы на простой модели проверить, не превышают ли в динамической задаче напряжения в волокне, соседнем с разрушающимся, соответствующие напряжения в статической задаче.

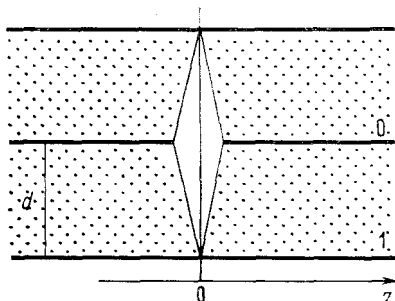


Рис. 1



Рис. 2

Рассмотрим модель, состоящую из трех волокон (рис. 1). Модуль упругости волокон  $E$ , площадь сечения  $A$ , расстояние между волокнами  $d$ . Среднее волокно разрушается в сечении  $z=0$ . Считаем, что матрица между волокнами работает только на сдвиг, ее модуль сдвига  $G$ , ширина  $h$ . Обозначим  $u_0(z, t)$  и  $u_1(z, t)$  перемещения соответственно среднего и крайних волокон. Сила  $P_i$  в волокнах равна

$$P_i(z, t) = EA \frac{\partial u_i(z, t)}{\partial z},$$

а касательное усилие  $Gh(u_1 - u_0)/d$ .

Обозначим плотность волокон через  $\rho$ . Тогда уравнения волокон будут

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= EA \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{2Gh}{d}(u_0 - u_1), \\ \rho A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= EA \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{Gh}{d}(u_0 - u_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Начальные условия при  $t=0$

$$u_0 = u_1 = \frac{P}{EA} z, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = C.$$

Граничные условия при  $z=0$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = 0, \quad u_1 = 0.$$

Введем обозначения

$$\tau = \sqrt{\frac{3Gh}{\rho Ad}} t, \quad x = \sqrt{\frac{3Gh}{EA d}} z \quad (2)$$

и перейдем к переменным

$$v = u_0 - u_1, \quad w = u_0 + 2u_1. \quad (3)$$

Из (1) – (3) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4)$$

с начальными условиями при  $\tau=0$

$$\begin{aligned} v=0, \quad w &= \frac{3P}{AE} z = \frac{3P}{AE} \sqrt{\frac{EA d}{3Gh}} x = 3bx, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и граничными условиями при  $x=0$

$$v-w=0, \quad 2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

К этим условиям следует добавить условие ограниченности напряжений в бесконечности.

Перейдем в системе (4) к изображениям

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{p} \bar{V}(p, x) e^{pt} dp, \quad w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{p} \bar{W}(p, x) e^{pt} dp. \quad (7)$$

Из (4), (5), (7) имеем систему

$$\bar{V}'' - (p^2 + 1) \bar{V} = 0, \quad \bar{W}'' - p^2 \bar{W} = -3bxp^2. \quad (8)$$

Из (8) с учетом (6) получаем

$$\begin{aligned} \bar{V}(p, x) &= \frac{3b}{p + 2\sqrt{p^2 + 1}} e^{-\sqrt{p^2 + 1}x}, \\ \bar{W}(p, x) &= \frac{3b}{p + 2\sqrt{p^2 + 1}} e^{-px} + 3bx. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычислим напряжение в крайнем волокне

$$\sigma_1 = E \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{1}{3} E \sqrt{\frac{3Gh}{EA d}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Обозначим

$$s = \frac{A}{P} \sigma_1,$$

тогда

$$\bar{S} = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p+2\sqrt{p^2+1}} e^{-\sqrt{p^2+1}x} - \frac{p}{p+2\sqrt{p^2+1}} e^{-px} + 1. \quad (10)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \frac{p}{p+2\sqrt{p^2+1}} &\rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} \frac{p}{p+2\sqrt{p^2+1}} e^{pt} dt = \\ &= \frac{e^{-t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\xi) \cos t\xi + D(\xi) \sin t\xi}{B^2(\xi) + D^2(\xi)} d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} B(\xi) &= -1 + \sqrt{2} \sqrt{R(\xi) + 2 - \xi^2}, \\ D(\xi) &= \xi + \sqrt{2} \sqrt{R(\xi) - 2 + \xi^2}, \quad R(\xi) = \sqrt{\xi^4 + 4}. \end{aligned}$$

Тогда <sup>(1)</sup>

$$S = \begin{cases} 1,5 & \text{при } \tau < x, \\ 1,5[1 - f(\tau - x)] - \frac{x}{2} \int_x^\tau [1 - f(\xi)] \frac{J_1(\sqrt{(\tau - \xi)^2 + x^2})}{\sqrt{(\tau - \xi)^2 + x^2}} d\xi & \text{при } \tau > x. \end{cases}$$

Зависимость  $S(\tau)$  приводится на рис. 2.

Полученный результат показывает, что в процессе разрыва волокна имеет место плавный переход из одного напряженного состояния в другое без превышения напряжений, которые получаются при статическом анализе, что указывает на допустимость статического рассмотрения армированных материалов.

Автор приносит глубокую благодарность акад. Ю. Н. Работнову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
20 I 1975

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> В. А. Диткин, А. П. Прудников, Справочник по операционному исчислению, «Высшая школа», М., 1965.