

А. Б. ХАРАЗИШВИЛИ

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 19 XII 1974)

В настоящей статье рассматривается несколько вопросов, связанных с продолжимостью инвариантных мер различных типов.

Будем называть пространством с инвариантной мерой всякую четверку вида (X, G, S, μ) , где X — произвольное множество, G — группа перестановок X , S — G -инвариантное σ -кольцо частей X , служащее покрытием X , μ — G -инвариантная мера на S . Пусть Y — μ -измеримое почти G -инвариантное подмножество X (т. е. $(\forall g) (g \in G \Rightarrow \mu(Y \Delta g(Y)) = 0)$). Частью меры μ , ассоциированной с Y , назовем функцию $\mu_Y: S \rightarrow R^+$, задаваемую равенством $\mu_Y(Z) = \mu(Z \cap Y)$. Говорим, что часть μ_Y есть элемент меры μ , если для каждого $Z \in S$ с $\mu_Y(Z) > 0$ найдется последовательность $(g_n)_{n \in N}$ преобразований из G такая, что $\mu(Y \setminus \bigcup_{n \in N} g_n(Z)) = 0$.

Из леммы Цорна немедленно вытекает существование максимального по включению семейства $(\mu_{Y_i})_{i \in I}$, удовлетворяющего следующим соотношениям:

- а) $(\forall i) (i \in I \Rightarrow \mu(Y_i) \neq 0)$;
 - б) $(\forall i) (\forall j) (i \in I \ \& \ j \in I \ \& \ i \neq j \Rightarrow \mu(Y_i \cap Y_j) = 0)$,
- причем для любых двух семейств $(\mu_{Y_i})_{i \in I}$ и $(\mu_{Z_j})_{j \in J}$ с указанными свойствами существует биективное отображение $\varphi: I \rightarrow J$ такое, что
- $$(\forall i) = (i \in I \Rightarrow \mu(Y_i \Delta Z_{\varphi(i)}) = 0).$$

Поэтому все максимальные семейства элементов μ отождествимы между собой.

Скажем, что мера μ разложима по своим элементам, если имеет место равенство

$$\mu = \sum_{i \in I} \mu_{Y_i}.$$

При $\text{Card } I = 0$ будем говорить, что μ — вполне неэлементарная (или просто неэлементарная) мера. Отметим здесь же, что в дальнейшем рассматриваются исключительно такие инвариантные меры, которые на одноточечных подмножествах X принимают значение 0.

Предложение 1. Пусть для пространства (X, G, S, μ) выполняются следующие условия:

- 1) $\text{Card } X$ — неизмеримое в узком смысле бесконечное кардинальное число * и ω_0 не конфинально начальному порядковому числу мощности $\text{Card } X$,
- 2) $\text{Card } G = \text{Card } X$ и G действует транзитивно на X ,
- 3) $(\forall Z) ((Z \in S \ \& \ \text{Card } Z < \text{Card } X) \Rightarrow \mu(Z) = 0)$,
- 4) мера μ не является вполне неэлементарной.

Тогда найдется элементарная G -инвариантная мера μ' , строго продолжающая μ .

Наметим коротко доказательство этого утверждения. Можно предполагать, что все части X с мощностями, меньшими $\text{Card } X$, принадлежат обла-

* Другими словами, в булеане X нет σ -аддитивного ультраидеала, покрывающего X .

сти определения μ . Обозначим через φ начальное ординальное число, соответствующее $\text{Card } G$, и занумеруем элементы G в φ -последовательность $(g_\xi)_{\xi < \varphi}$. Пусть G_η — подгруппа группы G , порождаемая семейством $(g_\xi)_{\xi < \eta}$, $\eta < \varphi$. Трансфинитной индукцией без труда строятся φ -последовательность $(Z_\xi)_{\xi < \varphi}$ подмножеств X , для которой справедливы следующие соотношения:

- 1) $(Z_\xi)_{\xi < \varphi}$ есть разбиение пространства X ;
- 2) $(\forall \xi) (\xi < \varphi \Rightarrow (\text{Card } Z_\xi \leq \text{Card } \xi + \aleph_0 \ \& \ (\forall (\zeta) (\zeta < \xi \Rightarrow Z_\zeta \text{ представляет собой } G_\zeta\text{-инвариантную часть } X)))$.

Если теперь μ_Y — элемент меры μ , причем $\mu(Y) > 0$, то для некоторого $J \subset [0, \varphi[$ пересечение Y с $\bigcup_{\xi \in J} Z_\xi$ μ -измеримо (в противном случае существовала бы конечная двузначная мера на булеане интервала $[0, \varphi[$), но непосредственно видно, что множество $Y \cap (\bigcup_{\xi \in J} Z_\xi)$ можно включить в область определения μ , положив $\mu(Y \cap (\bigcup_{\xi \in J} Z_\xi)) = 0$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается

Предложение 2. *Допустим, что пространство (X, G, S, μ) удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) $\text{Card } X$ неизмеримо в узком смысле и ω_0 не конфинально начальному порядковому числу мощности $\text{Card } X$;
- 2) $\text{Card } G = \text{Card } X$ и G содержит подгруппу G_0 с $\text{Card } G_0 = \text{Card } G$, действующую свободно и транзитивно на X ;
- 3) μ является нетривиальной разложимой мерой*.

Тогда существует разложимая G -инвариантная мера μ' , строго продолжающая μ .

Предложения 1, 2 для инвариантных мер лебеговского типа были доказаны в ⁽¹⁾, причем доказательство существенно опиралось на тот факт, что мера единичного куба в E_n равна 1 (или в случае ненормированных мер некоторому строго положительному конечному вещественному числу c). Однако во многих вопросах теории D_n -инвариантных мер (D_n — группа всех движений пространства E_n) последнее обстоятельство не играет никакой роли. Заметим, что в E_n можно построить такую D_n -инвариантную σ -конечную разложимую меру μ , в область определения которой входит лебеговский класс L_n , что для всякого $Z \in L_n$ соотношение $l_n(Z) > 0$, где l_n — мера Лебега в E_n , влечет равенство $\mu(Z) = +\infty$. Построение этой меры производится следующим образом. Сначала с помощью трансфинитной индукции определяем счетное разбиение $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ пространства E_n , для которого выполняются соотношения:

- 1) $(\forall i) (\forall g) (i \in \mathbb{N} \ \& \ g \in D_n \Rightarrow \text{Card } (Y_i \Delta g(Y_i)) < 2^{\aleph_0})$,
- 2) $(\forall i) (\forall F) (i \in \mathbb{N} \ \& \ F \text{ — замкнутое подмножество } E_n \ \& \ l_n(F) > 0 \Rightarrow \text{Card } (Y_i \cap F) = 2^{\aleph_0})$.

Далее, рассматриваем σ -алгебру частей E_n вида $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (Z_i \cap Y_i)$, где все Z_i принадлежат L_n , и полагаем

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (Z_i \cap Y_i)\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} l_n(Z_i).$$

Легко проверяется, что на указанной σ -алгебре функция μ представляет собой меру. Если μ стандартным методом продолжить на класс неконтинуальных подмножеств E_n , то получим D_n -инвариантную меру с нужными нам свойствами.

Приводимая ниже лемма служит аналогом классической теоремы Витали о множествах, не измеримых в смысле Лебега.

Лемма. *Пусть (X, G, S, μ) — пространство с инвариантной мерой, причем G имеет подгруппу мощности $\aleph_1$, действующую свободно на X , а μ удовлетворяет условию*

* Т. е. не равной тождественно нулю.

(А) произвольное семейство попарно непересекающихся μ -измеримых частей X со строго положительными мерами не более чем счетно.

Тогда каждое $Y \subset X$ с $\mu^*(Y) > 0$ содержит μ -неизмеримое подмножество.

При доказательстве этого утверждения используется известная теорема Улама о неизмеримости в широком смысле кардинального числа $\aleph_1$ (см. (2)).

Следующий результат сразу же вытекает из предложения 1 и только что сформулированной леммы.

Предложение 3. Допустим, что для пространства (X, G, S, μ) выполняются условия леммы и кроме того $\text{Card } X$ — неизмеримое в узком смысле кардинальное число, не конфинальное с $\aleph_0$, $\text{Card } G = \text{Card } X$ и G транзитивна на X , μ — нетривиальная мера на S и

$$(\forall Z) (\text{Card } Z < \text{Card } X \ \& \ Z \in S \Rightarrow \mu(Z) = 0).$$

При этих предположениях существует собственно содержащее S σ -кольцо S' , на котором можно задать нетривиальную G -инвариантную меру μ' , обладающую свойством (А).

З а м е ч а н и е. Часть μ_Y меры μ называется сингулярной, если область значений μ_Y совпадает с множеством $\{0, +\infty\}$. Легко видеть, что заданная на σ -алгебре инвариантная мера, удовлетворяющая соотношению (А) и не имеющая сингулярных частей, σ -конечна. С другой стороны, при $n \geq 1$ в пространстве E_n существуют не σ -конечные D_n -инвариантные меры без сингулярных частей, а также не σ -конечные D_n -инвариантные меры, для которых справедливо соотношение (А).

В соответствии с общими определениями теории множеств (см. (3)), гомоморфизмом пространства с мерой (X_1, S_1, μ_1) в пространство с мерой (X_2, S_2, μ_2) называют всякое отображение $f: X_1 \rightarrow X_2$ такое, что

$$(\forall Z) (Z \in S_2 \Rightarrow f^{-1}(Z) \in S_1 \ \& \ \mu_1(f^{-1}(Z)) = \mu_2(Z)).$$

Имеет место

Теорема. Пусть (X, S, μ) — пространство с мерой, причем

$$(\forall Z) (Z \subset X \ \& \ \text{Card } Z < \text{Card } X \Rightarrow Z \in S \ \& \ \mu(Z) = 0).$$

Тогда если G — группа перестановок X с мощностью, равной $\text{Card } X$, то найдется G -инвариантная мера μ' , гомоморфным образом которой служит μ . В частности, если μ — неатомическая мера, то μ' можно считать вполне элементарной мерой.

Предложение 4. При $n \geq 1$ в E_n существует D_n -инвариантная неэлементарная сепарабельная мера μ , являющаяся продолжением лебеговской меры l_n .

Последнее утверждение дает ответ на вопрос, поставленный в (1).

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
6 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ш. С. Пхакадзе, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 25 (1958). ² S. Ulam, Fund. Math., 16 (1930). ³ Н. Бурбаки, Теория множеств, М., 1965.