

Ю. И. ХЛОПКОВ

О БРОУНОВСКОМ ДВИЖЕНИИ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 5 XI 1974)

Явление хаотического движения мелких, взвешенных в жидкости частиц, послужило источником ряда работ Эйнштейна ⁽¹⁾, в которых он получает формулы для коэффициента диффузии D и среднего смещения λ_x :

$$D = \frac{kT}{P}; \quad (1)$$

$$\lambda_x = \sqrt{2Dt}; \quad (2)$$

здесь P — коэффициент пропорциональности, t — время.

Оценки, проведенные Эйнштейном для жидкости, получили блестящее подтверждение в опытах Перрена ⁽²⁾.

Основным предположением считается малая скорость движения частицы, откуда сопротивление среды F прямо пропорционально скорости частицы v :

$$F = Pv. \quad (3)$$

Для получения конкретных значений коэффициента диффузии и среднего смещения необходимо знать коэффициент P . Вслед за Эйнштейном коэффициент пропорциональности обычно находят из формулы Стокса, предполагая шарообразность частиц:

$$F_{ст} = 6\pi\mu Rv, \quad (4)$$

где μ — вязкость жидкости, R — радиус частицы.

Однако при движении мелких частиц в газах существенно нарушаются те гидродинамические условия, при которых была выведена формула (4). Впервые на это обратил внимание Смолуховский ⁽³⁾, проведя грубые оценки коэффициента P для случая больших длин пробега молекул газа λ . Основной работой по уточнению коэффициента P на случай разреженности среды несомненно является экспериментальная работа Милликена ⁽⁴⁾. Для интерполяции своих экспериментальных данных Милликен предложил полуэмпирическую формулу

$$F = F_{ст}(1 + A\lambda/R)^{-1}, \quad (5)$$

для которой сам же и установил пределы применимости:

$$\lambda/R \leq 0,5.$$

Для случая больших отклонений λ/R нужно использовать формулу вида

$$F = \frac{F_{ст}}{(A+B)\lambda/R}. \quad (6)$$

Коэффициенты A и $A+B$ определялись Милликеном из опыта.

Несмотря на тщательно проведенные опыты, без точного теоретического обоснования полученная зависимость силы сопротивления от разреженности среды не вызывала должного доверия даже у самого Милликена, и в опытах по проверке теории броуновского движения он избавляется от

«самого неудобного и неточного множителя, связанного с броуновским движением», компенсируя сопротивление движущихся частиц электростатической силой ⁽⁵⁾. Теоретическая работа Эпштейна ⁽⁶⁾, выполненная в 1924 г. по просьбе Милликена, представляет собой приближенную оцен-

ку сопротивления сферы; точное значение получается лишь в свободномолекулярном пределе.

Точный теоретический анализ возможен только с помощью решения уравнения Больцмана, что стало возможным лишь почти полвека спустя с развитием ЭВМ. Первые вычисления ^(7, 8) ограничивались либо грубой аппроксимацией функции распределения, либо несколькими приближениями от свободномолекулярного предела. Особо следует отметить работу Черчицьяни с сотрудниками ⁽⁹⁾, в которой вариационным методом была вычислена кривая зависимости сопротивления сферы от разреженности среды во всем диапазоне течения от сплошной среды до свободномолекулярного предела. Характерным параметром разреженности считается число Кнудсена $Kn = \lambda/R$.

При $Kn \rightarrow 0$ получается стоксово значение сопротивления, а при $Kn \rightarrow \infty$ кривая выходит на свободномолекулярный режим с значением сопротивления, полученным Эпштейном ⁽⁶⁾. Однако в этой работе решалось не само уравнение Больцмана, а его приближенная модель, в которой интеграл столкновений заменяется разностью равновесной и искомой функций распределения. Такая замена интеграла столкновения объясняется его исключительной сложностью, что существенно затрудняет проведение расче-

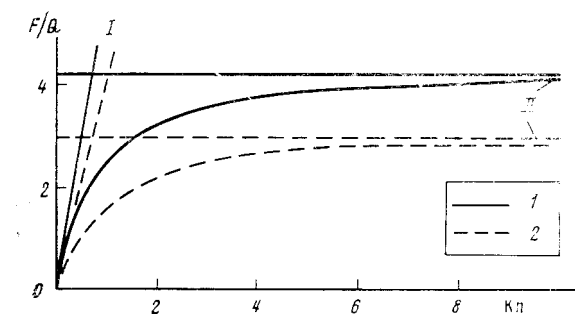


Рис. 1. Зависимость силы сопротивления F от Kn . $Q = \rho \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 v c$, ρ — плотность газа, c — тепловая скорость молекул. 1 — диффузное отражение, 2 — зеркальное; I — по закону Стокса, II — свободномолекулярный предел

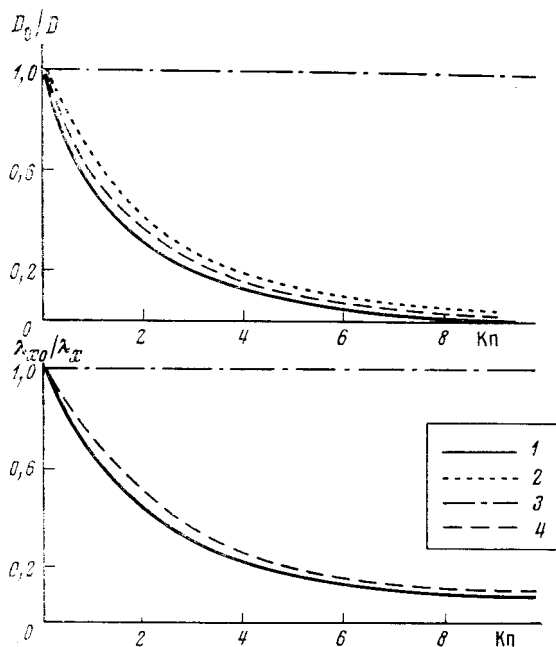


Рис. 2. Зависимость коэффициента диффузии D и среднего смещения λ_{x0} от Kn . 1 — данные ⁽⁵⁾, 2 — данные ⁽⁸⁾. 3 — результаты, соответствующие закону Стокса, 4 — наши данные

тов. Пока только метод Монте-Карло позволил преодолеть трудности вычисления интеграла столкновений.

В данной работе методом ⁽¹⁰⁾ решается линеаризованное уравнение Больцмана. Кратко суть метода заключается в следующем. Линеаризованное уравнение Больцмана

$$\frac{d\varphi}{dt} = -k\varphi + \int K^* \varphi, dV,$$

где φ — добавка к равновесной функции распределения, K^* — ядро Гильберта, записываем в интегральном виде и к полученному уравнению

$$\varphi = \varphi_r + \int K\varphi_1 dV_1 dt_1 \quad (7)$$

применяем известную процедуру Улама — Неймана⁽¹¹⁾. С уравнением (7) связывают однородную цепь Маркова, заданную плотностью начального и переходного распределения. Искомый функционал (сопротивление сферы) оцениваем с помощью среднего арифметического по выборочным траекториям цепи, построенным в соответствии с начальной и переходной плотностями вероятности. Зависимость силы сопротивления от Kn приведена на рис. 1.

Полученные результаты позволяют найти теоретическое значение коэффициента диффузии и среднего смещения во всем диапазоне течения от сплошносреднего до свободномолекулярного.

Необходимо отметить следующий факт. Милликен проводил опыты по уточнению закона Стокса на масляных каплях, для которых обнаружил интересную зависимость: 89,5% падающих на масло молекул отражаются диффузно, а 10,5% — зеркально. Если построить график зависимости коэффициента диффузии и среднего смещения от числа Kn при таком же соотношении диффузно и зеркально отраженных молекул, то совпадение экспериментальных данных с точным численным решением уравнения Больцмана находится в пределах ошибок, допущенных при опыте и проведении расчетов (рис. 2). На рис. 2 D_0 и λ_{x0} — коэффициент диффузии и среднее смещение, соответствующие классическому решению Стокса. Как видно из графиков, диффузия и среднее смещение броуновских частиц сильно изменяются при изменении разреженности среды. Различие в величинах коэффициентов диффузии и среднего смещения, вычисленных по формуле Стокса и с помощью решения уравнения Больцмана, может достигать нескольких порядков.

Следует оговориться, что зависимость λ_x от Kn справедлива только для тех значений t , для которых справедлива формула (2). При больших значениях числа Kn время свободного пробега может сравниться со значением t , что нарушает основное предположение, при котором была выведена эта формула.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность проф. М. Н. Когану за постоянное внимание к работе.

Центральный аэрогидродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
17 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 3, «Наука», М., 1966. ² Ж. Перрен, Атомы, М., 1924. ³ А. Эйнштейн, М. Смолуховский, Брауновское движение, М., 1936. ⁴ R. A. Millikan, Phys. Rev., v. 22, 1 (1923). ⁵ Р. Милликен, Электроны (+ —), протоны, фотоны, нейтроны и космические лучи, ГОНТИ, М.—Л., 1939. ⁶ П. С. Энштейн, В сб. Газовая динамика, М., 1950. ⁷ C. Y. Liu, T. Sigimure, In: Rarefied Gas Dynamics, v. 1, N. Y., 1966. ⁸ R. Willis, Phys. Fluids, v. 9, № 12, 2522 (1966). ⁹ C. Cercignani, C. Pagani, P. Rasanini, ibid., v. 11, 1395 (1968). ¹⁰ Ю. И. Хлопков, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., № 5, 1307 (1973). ¹¹ С. М. Ермаков, Метод Монте-Карло и смежные вопросы, «Наука», М., 1971.