

УДК 519.56

МАТЕМАТИКА

Е. В. ЩЕПИН

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ИСБЕЛЛА

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 XII 1974)

Пусть ω — покрытие метрического пространства X . Лебеговым числом этого покрытия $\lambda(\omega)$ называется верхняя грань таких чисел λ , что покрытие пространства X , состоящее из всевозможных замкнутых шаров радиуса λ , вписано в ω . Если $\lambda(\omega) > 0$, то покрытие ω называется равномерным. Пространство X называется равномерно паракомпактным, если во всякое равномерное покрытие этого пространства можно вписать равномерное локально-конечное покрытие. Исбелл (см. (1)) поставил следующую проблему*: всякое ли метрическое пространство равномерно паракомпактно? В настоящей заметке дается отрицательное решение этой проблемы.

Пусть M — некоторое множество, через $R(M)$ мы будем обозначать нормированное пространство ограниченных вещественных функций на M с нормой $\|f\| = \sup_{x \in M} |f(x)|$. Всякое метрическое пространство X изометрически вкладывается в $R(X)$. (Фиксируем точку $x_0 \in X$, тогда вложение задается так:

$$x \in X \mapsto f_x \in R(X): f_x(y) = \rho(x, y) - \rho(x_0, y),$$

где ρ — метрика в X .) Таким образом, из равномерной паракомпактности $R(X)$ вытекает и равномерная паракомпактность X , и для решения проблемы Исбелла достаточно выяснить, будет ли всякое пространство вида $R(M)$ равномерно паракомпактным.

Нетрудно доказать, что если M счетно, то $R(M)$ равномерно паракомпактно. Более того, можно доказать, что всякое метрическое пространство со счетной базой является равномерно паракомпактным. Ниже будет доказано, что $R(M)$ не является равномерно паракомпактным, если M имеет очень большую мощность, а именно, если мощность M больше либо равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\exp(\exp(\dots \exp(\aleph_0) \dots))}_{n \text{ раз}};$$

эту мощность мы будем обозначать через τ .

Ядро доказательства составляет следующая лемма, формулировке которой мы предпошлем введение следующих обозначений.

Для $f \in R(M)$ и вещественного числа r положим

$$O^r(f) = \{g \in R(M): \|g - f\| \leq r\}.$$

Для вещественного числа c через c_M обозначим постоянную функцию на M , тождественно равную c . Положим

$$O_n^r(f) = O^r(f) \cup O^r(f + r_M) \cup O^r(f + 2r_M) \cup \dots \cup O^r(f + (n-1)r_M).$$

* Точнее, проблема, которую ставит Исбелл ((1), стр. 144), следующая: всякое ли равномерное пространство равномерно паракомпактно? Нетрудно доказать эквивалентность этих формулировок.

Покрытие пространства $R(M)$ всевозможными множествами вида $O_n^r(f)$, где r и n фиксированы, обозначим $\omega_{r,n}^M$. Наконец, для покрытия ω через $d(\omega)$ будем обозначать верхнюю грань диаметров элементов ω .

Лемма. Пусть M и N — два бесконечных множества, причем $|M| \geq \exp(\exp(\exp |N|))$.

Тогда, если на $R(M)$ существует локально-конечное покрытие ω с $d(\omega) < \infty$, в которое вписано покрытие $\omega_{r,n}^M$, то на $R(N)$ существует локально-конечное покрытие ω' с $d(\omega') \leq d(\omega)$, в которое вписано покрытие $\omega_{r,2n}^N$.

Покажем, как из леммы вытекает отрицательное решение проблемы Исбелла. Пусть M — множество мощности τ . Тогда в покрытие $\omega_{1,1}^M$ пространства $R(M)$ (т. е. покрытие $R(M)$ всевозможными единичными шарами) нельзя вписать никакого равномерного локально-конечного покрытия. Действительно, предположим противное и пусть ω — искомое покрытие. Тогда $\omega_{\lambda(\omega),1}^M$ вписано в ω . Для любого натурального n существует такая последовательность бесконечных множеств $N_0, N_1, \dots, N_n$, что $N_0 = M$ и $|N_i| \geq \exp(\exp(\exp |N_{i+1}|))$ для $i=0, 1, \dots, n$. В частности, возьмем $n > \log_2(1/\lambda(\omega)) + 1$. Будем последовательно применять лемму. Получим, что существует такое покрытие ω' пространства $R(N_n)$, что

$$d(\omega') \leq d(\omega) \leq d(\omega_{1,1}^M) = 2$$

и, с другой стороны, в ω' вписано покрытие $\omega_{\lambda(\omega),2^n}^{N_n}$, но

$$d(\omega_{\lambda(\omega),2^n}^{N_n}) = (1+2^n)\lambda(\omega) > \left(1 + \frac{2}{\lambda(\omega)}\right)\lambda(\omega) > 2.$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Доказательство леммы. Будем считать, что $M = N \times L$ (декартово произведение), тогда $|L| = |M|$. Пусть $\pi: M = N \times L \rightarrow N$ — проекция. Тогда $\pi^*: R(N) \rightarrow R(M)$ — двойственное π вложение. $\pi^*R(N)$ состоит из функций на $N \times L$, зависящих только от первой координаты. Для всякого $y_0 \in L$ определим функцию $f_{y_0} \in R(M)$ следующим образом:

$$f_{y_0}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y_0 \neq y, \\ nr, & \text{если } y_0 = y, \end{cases}$$

где $(x, y) \in N \times L = M$.

Для любой функции $f \in \pi^*R(N)$ и любого $y \in L$ множество $O_n^r(f - f_{y_0})$ содержится в некотором элементе покрытия ω (по условию). Зафиксируем один такой элемент покрытия ω , обозначим его $\omega(f, y)$. Таким образом, каждому элементу $y \in L$ сопоставлена функция $\varphi_y: \pi^*R(N) \rightarrow \omega$, а именно $\varphi_y(f) = \omega(f, y)$. Заметим, что $\omega(f, y) = \varphi_y(f) \ni f$ для любых f и y . Оценим мощность множества функций $F = \{\varphi: \pi^*R(N) \rightarrow \omega\}$, удовлетворяющих условию $\varphi(f) \ni f$. Из этого условия, в силу локальной конечности покрытия ω , вытекает, что $\varphi(f)$ принимает конечное число значений, когда f пробегает F . А отсюда легко вытекает, что $|F| \leq \exp |R(N)|$, а $|R(N)| = \exp |N|$, таким образом, $|F| \leq \exp(\exp |N|)$, т. е.

$$|F| < |L| = |M| \geq \exp(\exp(\exp |N|)).$$

Следовательно, существуют такие $y_0 \in L$ и $y_1 \in L$, что $\varphi_{y_0} \equiv \varphi_{y_1}$. Т. е. для любой функции $f \in \pi^*R(N)$ множества $O_n^r(f - f_{y_0})$ и $O_n^r(f - f_{y_1})$ содержатся в одном и том же элементе покрытия ω , а именно в $\omega(f, y_0) = \omega(f, y_1)$.

Через A обозначим следующее подпространство $R(M)$:

$$A = \{g \in R(M): g = f - f_{y_0} \text{ или } g = f - f_{y_1} \text{ для некоторого } f \in \pi^*R(N)\}.$$

Покрытие, высеченное на A покрытием ω , обозначим через ω^A . Очевидно, что ω^A локально-конечно и что $d(\omega^A) \leq d(\omega)$. Через i обозначим такое

вложение $i: N \rightarrow M$, что $i(x) = (x, y_0) \in N \times L = M$. Тогда двойственное отображение $i^*: R(M) \rightarrow R(N)$ является отображением ограничения. Заметим, что i^* не может увеличивать расстояний. Искомое покрытие $\omega' = i^*(\omega^A)$.

Действительно, сужение отображения i^* на A , $i^*|_A: A \rightarrow R(N)$, — двукратное открытое отображение, следовательно, покрытие ω' локально-конечно. Далее, i^* не увеличивает расстояний, следовательно, $d(\omega') \leq d(\omega^A) \leq d(\omega)$. Осталось проверить только, что $\omega_{r, 2n}^N$ вписано в ω' . Возьмем любой элемент $O_{2n}^r(f)$ покрытия $\omega_{r, 2n}^N$. Существует такой элемент покрытия ω , который содержит

$$O_n^r(\pi^*(f + nr_N) - f_{y_0}) \cup O_n^r(\pi^*(f + nr_N) - f_{y_1});$$

это

$$\omega(\pi^*(f + nr_N), y_0) = \omega(\pi^*(f + nr_N), y_1),$$

обозначим его $\omega(f)$. Тогда $i^*(\omega(f) \cap A) \in \omega'$ содержит $O_{2n}^r(f)$. Действительно,

$$i^*(O_n^r(\pi^*(f + nr_N) - f_{y_0})) = O_n^r(f)$$

и

$$i^*(O_n^r(\pi^*(f + nr_N) - f_{y_1})) = O_n^r(f + nr_N),$$

следовательно,

$$O_n^r(f) \cup O_n^r(f + nr_N) = O_{2n}^r(f) \subset i^*(\omega(f) \cap A).$$

Лемма полностью доказана.

Несколько более тщательно проведенное рассуждение позволяет доказать следующий более точный результат.

Теорема. *Всякое равномерное покрытие пространства ограниченных вещественных функций на множестве мощности*

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\exp(\exp \dots \exp(\aleph_0) \dots)}_{n \text{ раз}},$$

элементы которого имеют диаметры, ограниченные в совокупности, имеет кратность $\geq \tau$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. R. Isbell, Uniform Spaces, Providence, 1964.