

В. Л. АЗАРОВ, Л. Н. ЛУПЧЕВ, Г. А. ТАВРИЗОВ

К ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 31 X 1974)

Приведены представления динамических и частотных гриновских функций и скалярных частотных характеристических уравнений линейных замкнутых распределенных регулируемых систем через гриновские функции их разомкнутых аналогов и решения конечных систем линейных уравнений, вольтерровых 2-го рода — в динамическом случае и алгебраических — в частотном. Для случая (счетного) дискретного резонансного множества дано явное представление форм колебаний замкнутой распределенной системы через корни скалярного характеристического уравнения разомкнутой системы и частотную гриновскую функцию системы разомкнутой.

1. Пусть модель объекта регулирования содержит K континуумов, пронумерованных индексом k , пробегающим $D_k = \{1, \dots, K\}$. Примем, что любой точке континуума номера k можно взаимно однозначно сопоставить упорядоченную совокупность Q_k чисел («координат») $r^k = (r_{k1}, \dots, r_{kQ_k})$ с областью изменения D_{r^k} и пусть внешнее воздействие и отклик, соответствующие рассматриваемому континууму, имеют одинаковые количества N_k независимых функциональных скалярных компонент, пронумерованных индексом $s = s(k)$ которых пробегает множество $D_s(k) = \{1, \dots, N_k\}$. Динамическое поведение объекта на временной полуоси $D_t = [0, \infty)$ полагаем представленным системой выходных функций $\{y_{ks}(r^k, t)\}$, обусловленной имеющим аналогичную структуру входным воздействием $\{f_{ks}(r^k, t)\}$, которое при необходимости учитывает и нетривиальное начальное состояние; общий носитель входной и выходной функциональных систем есть $S = \bigcup_{k \in D_k} (\bar{D}_{r^k} \times D_s(k)) \times D_t$ ($\bar{D}$ — замыкание множества D).

Исходное динамическое уравнение объекта имеет вид

$$A' \{y_{ks}(r^k, t)\} = \{f_{ks}(r^k, t)\}, \quad (1)$$

где функциональная система $\{f_{ks}(r^k, t)\}$ произвольно фиксирована в пространстве правых частей H_2 , отклик отыскивается в «пространстве поиска решений» H_1' , A' — «описывающий оператор» с областью определения $D(A') = H_1'$ (пространства H_1' , H_2 и оператор A' линейны).

Уравнение (1) (как динамическое) однозначно разрешимо, откуда следует, что существует линейное «пространство решений» $H_1 \subseteq H_1'$ такое, что $(A'[H_1' \setminus H_1]) \cap H_2 = \emptyset$ и сужение A оператора A' с H_1' на H_1 есть обратимый оператор с областью значений $R(A) = H_2$, так что решение уравнения (1) имеет для всех $\{f_{ks}(r^k, t)\} \in H_2$ представление

$$\{y_{ks}(r^k, t)\} = G \{f_{ks}(r^k, t)\}, \quad (2)$$

где $G \equiv A^{-1}$ — гриновский оператор объекта.

Применив достаточно широкое H_2 и положив в (2)

$$\{f_{ks}(r^k, t)\} = \{\delta(t - \tau) \delta_{kk} \delta_{ss} \delta(r^k - \rho^k)\}, \quad (3)$$

получим в качестве решения гриновскую «функцию» объекта $\{G_{kss\sigma}(r^k, t;$

$\rho^x, \tau\}$, в выражении которой κ, σ, ρ^x и τ суть параметры, пробегающие соответственно $D_k, D_s(\kappa), D_{r^x}, D_l$, а $\delta(r^k - \rho^x) \equiv \prod_{j=1, \dots, q_x} \delta(r_{kj} - \rho_{xj})$.

Тогда (2) допускает специализацию

$$\{y_{ks}(r^k, t)\} = \left\{ \int_{\tau=0}^t \sum_{\kappa \in D_k} \sum_{\sigma \in D_s(\kappa)} \int_{\rho^x \in D_{r^x}} G_{ks\kappa\sigma}(r^k, t; \rho^x, \tau) f_{\kappa\sigma}(\rho^x, \tau) d\rho^x d\tau \right\}, \quad (4)$$

где $d\rho^x \equiv \prod_{j=1, \dots, q_x} d\rho_{xj}$ и интегрирование понимается в любом подходящем смысле.

Охарактеризуем замкнутую систему. Пусть линейный оператор $\pi_{mh's'}$ описывает функционирование датчика, который с помощью нумерующего индекса m , пробегающего $D_m(k', s') = \{1, \dots, M_{h's'}\}$, различается среди прочих датчиков, чувствительных к функциональной скалярной компоненте выхода с индексом $s=s'$, принадлежащей континууму с номером $k=k'$. На вход этого датчика подается упомянутая компонента $y_{h's'}(r^{k'}, t)$, а на выходе имеет место функция $z_{mh's'}(t) \equiv \pi_{mh's'} y_{h's'}(r^{k'}, t)$ *. Аналогично, произвольный континуум с номером k содержит L_{ks} эффекторов, способных развивать управляющее воздействие класса компонент входа $f_{ks}(r^k, t)$ и различающихся с помощью нумерующего индекса $l \in D_l(k, s) = \{1, \dots, L_{ks}\}$.

Каждый датчик соединен с каждым эффектором контуром цепи обратной связи, в который встроены регуляторный блок, представленный линейным оператором $g_{lks}^{mk's'}$, так что эффектор с номером $l \in D_l(k, s)$ имеет на входе функцию

$$v_{lks}(t) \equiv \sum_{k' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(k')} \sum_{m \in D_m(k', s')} g_{lks}^{mk's'} \pi_{mh's'} y_{h's'}(r^{k'}, t),$$

которую с помощью линейного оператора p_{lks}^{rt} преобразует в развиваемую на континууме с номером k компоненту управляющего воздействия вида $p_{lks}^{rs} v_{lks}(t) = p_{lks}(r^k, t)$. Тогда полное управляющее воздействие может быть представлено функциональной системой

$$\{P_{ks}(r^k, t)\} \equiv \left\{ \sum_{l \in D_l(k, s)} p_{lks}^{rt} \sum_{k' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(k')} \sum_{m \in D_m(k', s')} g_{lks}^{mk's'} \pi_{mh's'} y_{h's'}(r^{k'}, t) \right\}$$

и общее динамическое уравнение замкнутой системы запишется в форме

$$(A' + \Delta') \{y_{ks}(r^k, t)\} = \{f_{ks}(r^k, t)\}, \quad \{f_{ks}(r^k, t)\} \in H_2, \quad (5)$$

где ответственный за замыкание оператор возмущения задан соотношением

$$\Delta' \{y_{ks}(r^k, t)\} = \left\{ - \sum_{l \in D_l(k, s)} p_{lks}^{rt} \sum_{k' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(k')} \sum_{m \in D_m(k', s')} g_{lks}^{mk's'} \pi_{mh's'} y_{h's'}(r^{k'}, t) \right\}. \quad (6)$$

Если объект и система регулирования трансляционно-инвариантны во времени, то возможно расширение D_l на всю временную ось $(-\infty, +\infty)$ и далее переход к частотным аналогам уравнений (1) и (5), которые можно считать результатом применения к (1) и (5) обобщенного преобразования Фурье. Обозначив Фурье-оператор через Φ , мы запишем их в форме

$$A_{\omega'} \{Y_{ks}(r^k, \omega)\} = \{F_{ks}(r^k, \omega)\}; \quad (7)$$

$$(A_{\omega'} + \Delta_{\omega'}) \{Y_{ks}(r^k, \omega)\} = \{F_{ks}(r^k, \omega)\}, \quad (8)$$

* Ниже предполагаем обычно реализуемую на практике форму

$$z_{mk's'}(t) \equiv \int_{\tau=0}^t W_{mk's'}(t, \tau) \int_{\rho^{k'} \in D_{r^k}} \Omega_{mk's'}(\rho^{k'}) y_{k's'}(\rho^{k'}, \tau) d\rho^{k'} d\tau,$$

где $W_{mk's'}(t, \tau)$ и $\Omega_{mk's'}(\rho^{k'})$ — обобщенные (часто сингулярные) функции.

где $Y_{ks}(r^k, \omega) = \Phi y_{ks}(r^k, t)$, $F_{ks}(r^k, \omega) = \Phi f_{ks}(r^k, t)$, $A_\omega' = \Phi A' \Phi^{-1}$,
 $\Delta_\omega' \{Y_{ks}(r^k, \omega)\} =$

$$= \left\{ - \sum_{l \in D_l(k, s)} p_{lks}^{\tau\omega} \sum_{k' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(k')} \sum_{m \in D_m(k', s')} g_{lks}^{mk's'}(\omega) \pi_{mk's'}^\omega Y_{ks}(r^k, \omega) \right\}, \quad (9)$$

$$p_{lks}^{\tau\omega} = \Phi p_{lks}^{\tau l} \Phi^{-1}, \quad g_{lks}^{mk's'}(\omega) = \Phi g_{lks}^{mk's'} \Phi^{-1}, \quad \pi_{mk's'}^\omega = \Phi \pi_{mk's'} = \Phi^{-1}.$$

2. Заметим теперь, что наши определения операторов и пространств A' , A , Δ' , H_1' , H_1 , H_2 не нарушают аксиоматики, которой подчинены в ⁽¹⁾ подобно обозначенные математические объекты, и поэтому все абстрактные результаты указанной работы допускают соответствующую специализацию. В частности, воспользовавшись для факторизации $\Delta' = \psi' \varphi'$ (см. (6)) с

$$\varphi' \{y_{ks}(r^k, t)\} = \{-\pi_{mks} y_{ks}(r^k, t)\} = \{z_{mks}(t)\}; \quad (10)$$

$$\psi' \{z_{mks}(t)\} = \left\{ \sum_{l \in D_l(k, s)} p_{lks}^{\tau l} \sum_{k' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(k')} \sum_{m \in D_m(k', s')} g_{lks}^{mk's'} z_{mk's'}(t) \right\}, \quad (10')$$

приведенной в ⁽¹⁾ теоремой о факторизованном возмущении, допустив существование импульсных переходных функций $g_{lks}^{m'k's'}(t, \tau) = g_{lks}^{m'k's'} \delta(t - \tau)$ всех регуляторных блоков и приняв во внимание (4), получим характеристическую систему для mks -компонент, принадлежащих пространству $H_3' = \varphi' H_1'$ элементов $\{z_{mks}(t)\} = (I + \varphi' A^{-1} \psi')^{-1} \varphi' A^{-1} \{f_{ks}(r^k, t)\}$ в форме

$$z_{mks}(t) + \sum_{k' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(k')} \sum_{m' \in D_m(k', s')} \int_0^t V_{mks}^{m'k's'}(t, \tau) z_{m'k's'}(\tau) d\tau = F_{mks}(t); \quad (11)$$

$$m \in D_m(k, s), \quad s \in D_s(k), \quad k \in D_k,$$

где правые части имеют вид

$$F_{mks}(t) = -\pi_{mks} \int_{\tau=0}^t \sum_{x \in D_k} \sum_{\sigma \in D_s(x)} \int_{\rho^x \in D_{r^k}} G_{ksx\sigma}(r^k, t; \rho^x, \tau) f_{x\sigma}(\rho^x, \tau) d\rho^x d\tau$$

и ядра

$$V_{mks}^{m'k's'}(t, \tau) = - \int_{\tau_1=\tau}^t W(t, \tau_1) \int_{\tau_2=\tau}^{\tau_1} \sum_{x \in D_k} \sum_{\sigma \in D_s(x)} \int_{\rho_1^k \in D_{r^k}} \int_{\rho^x \in D_{r^x}} \Omega_{mks}(\rho_1^k) \times$$

$$\times G_{ksx\sigma}(\rho_1^k, \tau_1; \rho^x, \tau_2) \sum_{l \in D_l(x, \sigma)} p_{lxs}^{\rho^x \tau_2} g_{lxs}^{m'k's'}(\tau_2, \tau) d\rho^x d\rho_1^k d\tau_2 d\tau_1$$

при обычных предположениях оказываются вольтерровыми.

При помощи функций $z_{mks}(t) = z_{mksx\sigma}(t; \rho^x, \tau)$, полученных из (11) подстановкой $\{f_{ks}(r^k, t)\}$ вида (3), имеем в соответствии с ⁽¹⁾ выражение для гриновской функции замкнутой системы

$$\{G'_{ksx\sigma}(r^k, t; \rho^x, \tau)\} = \{G_{ksx\sigma}(r^k, t; \rho^x, \tau) -$$

$$- \int_{\tau_1=0}^t \sum_{x_1 \in D_k} \sum_{\sigma_1 \in D_s(x_1)} \int_{\rho_1^{x_1} \in D_{r^{x_1}}} G_{ksx_1\sigma_1}(r^k, t; \rho^{x_1}, \tau_1) \times$$

$$\times \sum_{l \in D_l(x_1, \sigma_1)} p_{l x_1 \sigma_1}^{\rho_1^{x_1} \tau_1} \sum_{k' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(k')} \sum_{m' \in D_m(k', s')} g_{l x_1 \sigma_1}^{m'k's'} z_{m'k's'x\sigma}(\tau_1; \rho_1^{x_1}, \tau) d\rho_1^{x_1} d\tau_1\}. \quad (12)$$

Таким образом, факторизация (10), (10') привела к системе уравнений Вольтерра 2-го рода, число которых совпадает с общим количеством датчиков. Аналогично, факторизация с

$$\varphi' \{y_{ks}(r^k, t)\} = \left\{ - \sum_{h' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(h')} \sum_{m \in D_m(k', s')} g_{lks}^{mk's'} \pi_{mk's'} y_{k's'}(r^{k'}, t) \right\} = \{z_{lks}(t)\}; \quad (13)$$

$$\psi' \{z_{lks}(t)\} = \left\{ \sum_{l \in D_l(k, s)} p_{lks}^{\tau l} z_{lks}(t) \right\} \quad (13')$$

приводит к вольтерровой системе, число уравнений которой совпадает с числом эффикторов.

3. Подставив в соответствие операторам A_{ω}' , Δ_{ω}' (см. (7)–(9)) операторы A' , Δ , а пространствам $\Phi H_1'$, ΦH_1 , $\Phi H_3'$, ΦH_2 настоящей работы — пространства H_1' , H_1 , H_3' , H_2 статьи (1), выясняем, что теорема о факторизованном возмущении справедлива и в случае перехода (7) → (8). Пусть резонансное ω -множество объекта не содержит точек бесконечной кратности. На нерезонансном ω -множестве объекта и системы регулирования для факторизации $\Delta_{\omega}' = \psi' \varphi'$ с

$$\varphi' \{Y_{ks}(r^k, \omega)\} = \{-\pi_{mks}^{\omega} Y_{ks}(r^k, \omega)\} = \{Z_{mks}^{\omega}\}; \quad (14)$$

$$\psi' \{Z_{mks}^{\omega}\} = \left\{ \sum_{l \in D_l(k, s)} p_{lks}^{\tau \omega} \sum_{h' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(h')} \sum_{m' \in D_m(k', s')} g_{lks}^{mk's'}(\omega) Z_{m'k's'}^{\omega} \right\} \quad (14')$$

получим характеристическую алгебраическую систему

$$Z_{mks}^{\omega} + \sum_{h' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(h')} \sum_{m' \in D_m(k', s')} K_{m'k's'}^{m'k's'}(\omega) Z_{m'k's'}^{\omega} = F_{mks}^{\omega};$$

$$k \in D_k, \quad s \in D_s(k), \quad m \in D_m(k, s), \quad (15)$$

где $K_{m'k's'}^{m'k's'}(\omega) = \Phi V_{mks}^{m'k's'}(t, 0)$, $F_{mks}^{\omega} = \Phi F_{mks}(t)$. Через решения $Z_{mks}^{\omega} = Z_{mks\kappa\sigma}^{\omega}(\rho^*)$ системы (15) с $f_{ks}(r^k, t)$ вида (3) частотная гриновская функция замкнутой системы может быть представлена в форме

$$\{G_{ks\kappa\sigma}^{\omega}(r^k, \rho^*)\} = \{G_{ks\kappa\sigma}^{\omega}(r^k, \rho^*) - \sum_{x_1 \in D_k} \sum_{\sigma_1 \in D_s(x_1)} \int_{\rho_1^* \in D_{\tau x_1}} G_{ksx_1\sigma_1}^{\omega}(r^k, \rho_1^*) \times$$

$$\times \sum_{l \in D_l(x_1, \sigma_1)} p_{l x_1 \sigma_1}^{\rho_1^* \omega} \sum_{k' \in D_k} \sum_{s' \in D_s(k')} \sum_{m' \in D_m(k', s')} g_{l x_1 \sigma_1}^{m'k's'}(\omega) Z_{m'k's'\kappa\sigma}^{\omega}(\rho^*) d\rho_1^*\}. \quad (16)$$

где $G_{ks\kappa\sigma}^{\alpha}(r^k, \rho^*) = \Phi G_{ks\kappa\sigma}(r^k, t; \rho^*, 0)$.

Множество корней $\{\omega = \omega_j\}$ скалярного характеристического уравнения замкнутой распределенной системы, полученное приравниванием нулю детерминанта системы (15), совпадает с той частью резонансного множества замкнутой системы, которая не пересекается с объединением резонансных множеств объекта и регулятора. Соответствующие формы колебаний можно найти по формуле $\{Y_j^0\} = A_{\omega}^{-1} \psi' \{Z_0^{oj}\}$, где $\{Z_0^{oj}\}$ — подпространство решений однородного варианта системы (15) при $\omega = \omega_j$. Возможны и другие факторизации. Для исследования резонансных ω -точек объекта и системы регулирования необходимо предварительное включение нефункционирующего регулятора в описание объекта и перенос ответственных за резонанс членов из A_{ω}' в Δ_{ω}' .

Институт проблем управления
Москва

Поступило
2 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Л. Азаров, Л. Н. Луничев, Г. А. Таверизов, ДАН, т. 223, № 1 (1975).