

УДК 519.4:517:513.88

МАТЕМАТИКА

Р. Я. ГРАБОВСКАЯ, В. И. КОНОНЕНКО, В. Б. ОСИПОВ

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 13 I 1975)

В книге ⁽¹⁾ рассматриваются операторы обобщенного сдвига, порождаемые инфинитезимальными операторами первого и второго порядков. В работе ⁽²⁾ получено явное представление для инфинитезимальных операторов второго порядка в виде интегродифференциальных операторов второго порядка с аналитическими ядрами. В настоящей статье некоторые конструкции работ ⁽¹⁾ и ⁽²⁾ обобщаются на случай инфинитезимальных операторов n -го порядка, а затем строится соответствующий оператор обобщенного сдвига.

1. Отображение алгебры функций в алгебру интегральных операторов. Пусть H — пространство целых функций комплексной переменной t с топологией равномерной сходимости на каждом компакте. Будем искать оператор $K \in \mathcal{L}(H, H)$, обладающий свойствами:

$$[d^n/dt^n, K] = I, \quad n \geq 2; \quad (1)$$

$$(Kf)^{(i)}|_{t=0} = 0, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (2)$$

Лемма 1. *Линейный непрерывный оператор K определяется однозначно из равенств (1) и (2) и имеет вид*

$$Kf = \frac{1}{2n(n-2)!} \int_0^t (t+\tau)(t-\tau)^{n-2} f(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{n!} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu - 1} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\varepsilon_\nu \tau) d\tau, \quad (3)$$

где $\varepsilon_\nu = e^{i \cdot 2\pi \nu / n}$.

Лемма 2. *Степень оператора K имеет вид*

$$K^s f = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(n-1)s-1}}{[(n-1)s-1]!} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^s c_{i,p}^s t^{s-i} \tau^i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \varepsilon_h^p f(\varepsilon_h \tau) \right) d\tau,$$

где коэффициенты $c_{i,p}^s$ обладают свойством

$$c_{i,p}^s \geq 0, \quad \sum_{i=0}^s c_{i,p}^s = 1.$$

Из леммы 2 легко следует оценка

$$|K^s f|_R \leq \frac{R^{ns}}{[(n-1)s-1]!} |f|_R, \quad |f|_R = \max_{|t| \leq R} |f(t)|. \quad (4)$$

Пусть теперь $a(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s t^s$ — аналитическая функция в окрестности $t=0$. Рассмотрим оператор

$$K_{a(t)} f(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s K^s f = a_0 f(t) + \int \sum_{p=0}^{n-1} B_{p,a}(t, \tau) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^p f(\varepsilon_k \tau) d\tau. \quad (5)$$

Из оценки (4) следует, что $B_{p,a}(t, \tau)$ — целая функция экспоненциального типа от двух переменных t, τ .

Теорема 1. *Отображение $a(t) \rightarrow K_{a(t)}$ есть мономорфизм алгебры ростков аналитических функций в алгебру интегральных операторов вида (5).*

2. Представление алгебры дифференциальных операторов. Пусть L — дифференциальный оператор с коэффициентами, аналитическими в окрестности точки $t=0$:

$$L = \sum_{k=0}^N a_k(t) \frac{d^k}{dt^k}.$$

Поставим ему в соответствие интегродифференциальный оператор K_L , определенный равенством

$$K_L = \sum_{k=0}^N K_{a_k(t)} \frac{d^{kn}}{dt^{kn}}.$$

Теорема 2. *Соответствие $L \rightarrow K_L$ является мономорфизмом алгебры дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами в окрестности точки $t=0$ в алгебру $\mathcal{L}(H, H)$.*

3. Многомерный случай. Пусть $a(t) = a(t_1, \dots, t_m)$ — аналитическая в окрестности начала координат функция от m комплексных переменных, т. е.

$$a(t) = \sum_{k_i \geq 0} a_{k_1, \dots, k_m} t_1^{k_1} \dots t_m^{k_m}.$$

Построим оператор

$$K_{a(t)} f(t) = \sum_{k_i \geq 0} a_{k_1, \dots, k_m} K_{t_1}^{k_1} \dots K_{t_m}^{k_m} f(t); \quad (6)$$

здесь K_{t_i} — интегральный оператор, определенный формулой (3), действующий по переменной t_i .

Легко видеть, что сумма ряда (6) представима в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых есть интегральный оператор, где интегрирование ведется по некоторому набору переменных, и ядро есть целая функция нескольких переменных экспоненциального типа. Для соответствия $a(t) \rightarrow K_{a(t)}$ остается справедливым утверждение теоремы 1.

Дифференциальному оператору

$$L = \sum_{\alpha_i \geq 0} a_{\alpha}(t) D^{\alpha}, \quad t = (t_1, \dots, t_m), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m),$$

с аналитическими коэффициентами в окрестности начала координат поставим в соответствие интегродифференциальный оператор, действующий на целые функции m переменных по формуле

$$K_L = \sum_{\alpha_i \geq 0} K_{a_{\alpha}(t)} D^{n\alpha}. \quad (7)$$

Для соответствия $L \rightarrow K_L$ остается справедливой теорема 2.

4. Представление алгебры Ли. Пусть Γ — m -мерная вещественная алгебра Ли, реализованная линейными дифференциальными операторами первого порядка с аналитическими коэффициентами. Каждому такому оператору по формуле (7) поставим в соответствие интегриродифференциальный оператор n -го порядка, причем в силу теоремы 2 соотношения коммутации между соответствующими операторами будут сохраняться. Таким образом, построено точное представление алгебры Ли интегриродифференциальными операторами n -го порядка. Каноническим дифференциальным оператором (см. (1))

$$X_i = \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t) \frac{\partial}{\partial t_j},$$

где коэффициенты $b_{ij}(t)$ обладают свойством $b_{ij}(0, \dots, 0, t_i, \dots, t_m) = 0$, будут соответствовать операторы

$$Y_i = \frac{\partial^n}{\partial t_i^n} + F_i, \quad F_i = \sum_{j=1}^m K_{bij}(t) \frac{\partial^n}{\partial t_j^n}.$$

При этом из (2) следует, что

$$\frac{\partial^{|v|} F_i}{\partial t^{v_1} \dots \partial t^{v_{i-1}}} \Big|_{\substack{t_i=0 \\ \dots \\ t_{i-1}=0}} = 0, \quad |v| = v_1 + \dots + v_{i-1},$$

где $0 \leq v_j \leq n-1$.

5. Операторы обобщенного сдвига. Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{Y}_{i,s} u = Y_{i,t}, \quad i=1, \dots, m, \quad (8)$$

и начальных условий

$$u|_{s=0} = f(t), \quad D_s^v u|_{s=0} = 0, \quad |v| \geq 1, \quad (9)$$

где $v = (v_1, \dots, v_m)$, $0 \leq v_i \leq n-1$; здесь Y_i — интегриродифференциальные операторы n -го порядка, задающие представление системы операторов X_i (см. (1)).

Пусть H_m — пространство целых функций m комплексных переменных $t_1, \dots, t_m$ с обычной топологией (п.1).

Теорема 3. Система (8) при начальных условиях (9) совместна и имеет единственное решение $u(s, t) = T_i^s f(t)$, оператор $T_i^s \in \mathcal{L}(H, H)$ и является оператором обобщенного сдвига.

Таким образом, построен оператор обобщенного сдвига, который восстанавливается по инфинитезимальным операторам n -го порядка. Все инфинитезимальные операторы меньшего порядка аннулируются, аннулируются также инфинитезимальные операторы смешанного порядка.

Пусть A_i — копочномерное представление алгебры Ли Γ . Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{Y}_i E(t) = A_i E(t) \quad (10)$$

с начальными условиями

$$E(0) = I, \quad D^v E(0) = 0. \quad (11)$$

Теорема 4. Задача (10) и (11) имеет единственное решение $E(t)$, причем матрица функция $E(t)$ является линейным представлением обобщенного сдвига, т. е.

$$T_i^s E(t) = E(t) E(s).$$

Решение $E(t)$ можно выписать явно:

$$E(t) = U(t_m, A_m) \dots U(t_1, A_1), \quad U(t, A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{nk}}{(nk)!}.$$

З а м е ч а н и е 1. Аналогично в явном виде можно решать систему уравнений

$$\dot{Y}_i u = A_i u + f_i,$$

где A_i — ограниченные операторы в банаховом пространстве.

6. Операторы преобразования. Пусть семейство операторов

$$W_i = \sum_{j=1}^m \mu_i^j(t) \frac{\partial}{\partial t_i}$$

образует ту же структуру Ли, что и семейство операторов X_i . Известно, что эти два семейства подобны, т. е.

$$X_i = P^{-1} W_i P, \quad (12)$$

где P — оператор замены переменных. Находя представление левой и правой части равенства (12), получаем

$$Y_i = Q^{-1} Z_i Q.$$

Эти равенства означают, что семейство инфинитезимальных операторов Z_i n -го порядка подобно семейству канонических операторов Y_i . Оператор преобразования Q является линейным непрерывным оператором в пространстве H .

Совершенно аналогично связаны двойственные семейства:

$$Y_i = Q^{-1} Z_i Q.$$

Рассмотрим теперь неканоническую систему уравнений

$$Z_{i, s} u = Z_{i, t} u \quad (13)$$

и начальных условий

$$u|_{s=0} = f(t), \quad D_s^{\nu_i} u|_{s=0} = 0. \quad (14)$$

Т е о р е м а 5. Задача (13), (14) имеет единственное решение $u(s, t) = S_t^s f(t)$, семейство непрерывных операторов S_t^s является оператором обобщенного сдвига и связано с «каноническим» семейством T_t^s равенством

$$S_t^s f(t) = Q_s Q_t T_t^s Q_t^{-1}.$$

З а м е ч а н и е 2. Число n можно выбрать свое для каждой переменной, т. е. возникает представление, при котором оператору $\partial/\partial t_i$ отвечает оператор $\partial^{n_i}/\partial t_i^{n_i}$. В этом случае система (8) или (13) будет смешанной, т. е. по каждой переменной будет свой порядок производной. К системе (8) можно присоединить начальные условия (9), где $0 \leq \nu_i \leq n_i - 1$. Такая задача также порождает оператор обобщенного сдвига.

Авторы сердечно благодарят С. Г. Крейна, являющегося вдохновителем данной работы.

Воронежский лесотехнический институт
Дальневосточный государственный университет

Поступило
2 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. М. Левитан, Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973. ² Р. Я. Грабовская, С. Г. Крейн, ДАН, т. 212, № 2 (1973).