

УДК 530.12 : 531.51

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. П. ГРИЩУК, М. В. САЖИН

КЛАССИФИКАЦИЯ ПО ПЕТРОВУ БЕГУЩИХ И СТОЯЧИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 23 I 1975)

Инвариантное описание гравитационного излучения обычно связывают с алгебраической классификацией полей тяготения по Петрову ⁽¹⁾. Как правило, исходят из представления о бегущей гравитационной волне и широко используют аналогию этого явления с электромагнитными волнами. Многочисленные критерии гравитационных волн ⁽²⁾ чаще всего выделяют поля типа N в терминологии Пенроуза ⁽³⁾ и, наоборот, поля типа N обладают набором свойств, позволяющим называть их распространяющимися гравитационными волнами.

Стоячие гравитационные волны не подвергались столь подробному анализу. Тем не менее они интересны не только сами по себе, но и в связи с тем, что именно (слабые) стоячие гравитационные волны возникают в некоторых возможных схемах лабораторных излучателей гравитационных волн. В работе ⁽⁴⁾ в качестве излучателя рассматривали электромагнитный резонатор торовидной формы, в котором возбуждено переменное электромагнитное поле. Интерференция гравитационных волн, созданных таким излучателем, приводит к картине стоячей цилиндрически-симметричной гравитационной волны в фокальной области излучателя — в некоторой окрестности отрезка его оси симметрии. В малых участках пространства и на достаточно большом удалении от оси симметрии эти волны выглядят как плоские и поперечные, поэтому рассмотрим вначале более простой случай слабых плоских гравитационных волн.

Пусть метрика имеет вид ^(5, 6)

$$ds^2 = dx^0{}^2 - dx^2 - (1 - h_+) dy^2 + 2h_x dy dz - (1 + h_+) dz^2,$$

где

$$h_+ = h_+(x^0, x), \quad h_x = h_x(x^0, x), \quad \dot{h}_+ - h_+'' = 0, \quad \dot{h}_x - h_x'' = 0,$$

$\partial/\partial x^0$ обозначено точкой, $\partial/\partial x$ — штрихом. Вычислив компоненты тензора кривизны, можно составить по ним трехмерные тензоры $A_{ab} = R_{0a0b}$, $B_{ab} = 1/2 e_{acd} R_{0bcd}$ (e_{abc} — единичный антисимметричный тензор) и комплексный тензор $D_{ab} = A_{ab} + iB_{ab}$ (см., например, ⁽⁵⁾). Введем λ -матрицу, согласно определению,

$$Q_{ab}(\lambda) = D_{ab} - \lambda \delta_{ab},$$

где δ_{ab} — символ Кронекера. Отличны от нуля следующие компоненты λ -матрицы:

$$Q_{11} = -\lambda, \quad Q_{22} = -1/2 (\dot{h}_+ - i\dot{h}_x') - \lambda, \quad Q_{23} = Q_{32} = \\ = -1/2 (\dot{h}_x + i\dot{h}_+'), \quad Q_{33} = -1/2 (-\dot{h}_+ + i\dot{h}_x') - \lambda.$$

Таким образом, λ -матрица всегда имеет один простой элементарный делитель с корнем $\lambda^{(1)} = 0$. Отсюда следует, что в точках, в которых $Q_{23} = 0$, поле принадлежит к типу I или к типу 0; в точках, где $Q_{23} \neq 0$, поле принадлежит к типу I или к типу N.

Для определения корней $\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ имеем уравнение

$$\lambda^2 - [(\dot{h}_+)^2 - (\dot{h}_+')^2 + (\dot{h}_x)^2 - (\dot{h}_x')^2 + 2i(\dot{h}_+'\dot{h}_x - \dot{h}_+\dot{h}_x')] = 0. \quad (1)$$

Далее удобно рассмотреть порознь бегущие и стоячие волны.

Бегущая волна характеризуется зависимостью функций h_+ , $h_\times$ от аргумента $u=x^0 \pm x$. Для произвольных от h_+ и $h_\times$ это сводится символически к равенству $'=\pm\cdot$. Из λ матрицы следует, что поле всюду принадлежит к типу N , за исключением тех точек, в которых одновременно $\ddot{h}_\times=\ddot{h}_+=0$, т. е. $\partial^2 h_+/\partial u^2=0$ и $\partial^2 h_\times/\partial u^2=0$; в этих точках поле имеет тип 0. Если функции h_+ , $h_\times$ от аргумента u таковы, что вторая производная по u изменяет знак (только такие функции и имеет смысл называть собственно «волнами», в частном случае периодической зависимости от u получаем монохроматические волны), то обязаны существовать гиперповерхности $u=\text{const}$, на которых $\partial^2 h_+/\partial u^2=0$ или $\partial^2 h_\times/\partial u^2=0$. Вообще говоря, $\partial^2 h_+/\partial u^2$ и $\partial^2 h_\times/\partial u^2$ обращаются в нуль на различных гиперповерхностях. Но в частном случае монохроматических линейно-поляризованных волн всегда существуют гиперповерхности, на которых $\partial^2 h_+/\partial u^2$ обращается в нуль вместе с $\partial^2 h_\times/\partial u^2$. Например, при $h_\times=0$, $h_+=A \sin(\omega t - kx)$ поле принадлежит к типу N всюду, за исключением гиперповерхностей $\omega t - kx = n\pi$ (n — целое число), где оно принадлежит к типу 0. Итак, поле бегущей линейно-поляризованной волны всюду имеет тип N , за исключением отдельных гиперповерхностей, где оно имеет тип 0. Поле бегущей эллиптически-поляризованной волны, в частности, циркулярно-поляризованной, всюду принадлежит к типу N .

Аналогичная ситуация имеет место для бегущих электромагнитных волн. Инварианты электромагнитного поля всюду равны нулю, а само поле всюду отлично от нуля, за исключением отдельных гиперповерхностей (только в случае линейно-поляризованных волн), где E и H вместе обращаются в нуль.

Сложнее обстоит дело для стоячих волн. В общем случае эллиптически-поляризованной стоячей гравитационной волны все комплексные инварианты различны и поле всюду имеет тип I. В частном случае линейно-поляризованной стоячей волны на отдельных множествах точек достигается вырождение типа I в типы N и 0.

Рассмотрим стоячую линейно-поляризованную волну $h_\times=0$, $h_+=A \sin \omega t \cos kx$. Из уравнения (1) находим

$$\lambda^2 = A^2 k^4 \sin(\omega t - kx) \sin(\omega t + kx).$$

Всюду в плоскости x^0, x поле имеет тип I, за исключением линий $\omega t - kx = n\pi$, $\omega t + kx = m\pi$ (n, m — целые числа). На этих линиях поле принадлежит к типу N , за исключением точек пересечения линий ($\omega t = \frac{1}{2}(n+m)\pi$, $kx = \frac{1}{2}(m-n)\pi$), где оно принадлежит к типу 0. Итак, во внутренних точках квадрата, ограниченного линиями

$$\omega t - kx = 0, \quad \omega t + kx = 0, \quad \omega t - kx = \pi, \quad \omega t + kx = \pi,$$

поле имеет тип I с вещественными значениями инвариантов тензора кривизны, на сторонах квадрата — тип N , а в его углах — тип 0. Во внутренних точках соседних квадратов, примыкающих к сторонам выделенного, поле обладает типом I с мнимыми значениями λ и т. д. в «шахматном» порядке.

Для стоячей циркулярно-поляризованной волны $h_+=A \sin \omega t \cos kx$, $h_\times=A \cos \omega t \cos kx$ имеем $\lambda^2 = A^2 k^4 \exp(i2kx)$ и поле всюду принадлежит к типу I.

Вычислим также инварианты для стоячих электромагнитных волн, для которых обнаруживается любопытная аналогия со случаем гравитационных волн.

Для линейно-поляризованной стоячей электромагнитной волны $E_y=A \sin \omega t \cos kx$, $H_z=A \cos \omega t \sin kx$ имеем

$$F^2 = E^2 - H^2 + 2i(EH) = A^2 \sin(\omega t - kx) \sin(\omega t + kx).$$

Для циркулярно поляризованной стоячей электромагнитной волны $E = (0, A \sin \omega t \cos kx, A \cos \omega t \cos kx)$, $H = (0, A \sin \omega t \sin kx, A \cos \omega t \sin kx)$ имеем

$$F^2 = A^2 \exp(i2kx).$$

Обратимся теперь к классификации поля цилиндрически-симметричной стоячей гравитационной волны. В результате интегрирования линеаризованных волновых уравнений с конкретным тензором энергии — импульса в качестве источника, была получена метрика $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика плоского мира в координатах Минковского ($\eta_{00}=1$, $\eta_{xx}=\eta_{yy}=\eta_{zz}=-1$), а $h_{\mu\nu}$ описывается функциями (*)

$$\begin{aligned} h_{xx} &= -1/2 A \cos(\omega t + \psi) [J_0(kr) + \cos 2\varphi J_2(kr)], \\ h_{yy} &= -1/2 A \cos(\omega t + \psi) [J_0(kr) - \cos 2\varphi J_2(kr)], \\ h_{zz} &= A \cos(\omega t + \psi) J_0(kr), \\ h_{xy} &= -1/2 A \cos(\omega t + \psi) \sin 2\varphi J_2(kr), \\ h_{00} &= h_{0x} = h_{0y} = h_{0z} = h_{xz} = h_{yz} = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь введены обозначения: $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan \varphi = y/x$; J_0 и J_2 — функции Бесселя соответствующего порядка; $\omega = ck$, где c — скорость света; A , ψ и ω — произвольные постоянные.

В цилиндрических координатах относительные поправки к метрике плоского мира, неравные нулю, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} h_{rr} &= -A \cos(\omega t + \psi) \frac{J_1(kr)}{kr}, \quad h_{\varphi\varphi} = -A \cos(\omega t + \psi) \frac{dJ_1(kr)}{d(kr)}, \\ h_{zz} &= A \cos(\omega t + \psi) J_0(kr). \end{aligned} \quad (3)$$

Будем рассматривать (2) как точное, пригодное при всех значениях координат, решение линеаризованных уравнений Эйнштейна в вакууме $h_{\mu\nu, \alpha}{}^\alpha = 0$ (запятая обозначает простое дифференцирование, перемещение индексов производится с помощью метрики $\eta_{\mu\nu}$). Это решение удовлетворяет калибровочным условиям $h_{\mu, \nu}{}^\nu = 0$ и, кроме того, как видно из (2), условиям $h_{0\mu} = 0$ и $h = h_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = 0$.

Выпишем компоненты λ -матрицы для решения (2):

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -1/4 A k^2 \cos \omega t (J_0 + \cos 2\varphi J_2) - \lambda, \quad Q_{12} = Q_{21} = -1/4 A k^2 \cos \omega t \sin 2\varphi J_2, \\ Q_{13} &= Q_{31} = -1/2 A k^2 i \sin \omega t \sin \varphi J_1, \quad Q_{22} = -1/4 A k^2 \cos \omega t (J_0 - \cos 2\varphi J_2) - \lambda, \\ Q_{23} &= Q_{32} = 1/2 A k^2 i \sin \omega t \cos \varphi J_1, \quad Q_{33} = 1/2 A k^2 \cos \omega t J_0 - \lambda. \end{aligned}$$

В этих выражениях сделан выбор $\psi = 0$, а также для упрощения записи опущен аргумент kr в функциях Бесселя.

Умножим λ -матрицу справа на матрицу поворота $M_{ab}(\varphi)$, а слева — на транспонированную матрицу, где ненулевые элементы матрицы $M_{ab}(\varphi)$ равны $M_{11} = M_{22} = \cos \varphi$, $M_{33} = 1$, $M_{12} = -M_{21} = -\sin \varphi$. После преобразования получим один простой элементарный делитель с корнем

$$\lambda^{(1)} = -1/2 A k^2 \cos \omega t \frac{J_1(kr)}{kr}$$

и двумерную λ -матрицу с элементами соответствует $\lambda^{(2)}$

$$P_{11} = -1/2 A k^2 \cos \omega t J_1' - \lambda, \quad P_{12} = P_{21} = 1/2 A k^2 i \sin \omega t J_1, \quad P_{22} = 1/2 A k^2 \cos \omega t J_1 - \lambda,$$

где $J_1' = dJ_1(kr)/d(kr)$. Корни $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$ определяются равенствами (плюс

$$\lambda^{(2),(3)} = -1/4 A k^2 \left\{ -\cos \omega t \frac{J_1}{kr} \pm [\cos^2 \omega t (J_0 + J_1')^2 - 4 \sin^2 \omega t J_1^2]^{1/2} \right\}.$$

Дальнейший анализ λ -матрицы проводится элементарно и приводит к следующим результатам.

В плоскости r, t гравитационное поле (2) принадлежит к типу I всюду, за исключением отдельных линий, на которых достигается совпадение корней $\lambda^{(2)}$ с $\lambda^{(3)}$ или $\lambda^{(1)}$ с $\lambda^{(2)}$, и поле может принадлежать к типам II, D, 0. Конкретно, на линиях

$$\sin \omega t J_1 = \pm \cos \omega t \left(J_0 - \frac{1}{2kr} J_1 \right)$$

совпадают $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$ и поле принадлежит к типу II всюду, за исключением точек, где эти линии пересекаются. В точках пересечения, характеризуемых координатами $\cos \omega t = 0, J_1(kr) = 0$, поле имеет тип 0, в точках пересечения с координатами $\sin \omega t = 0, J_3(kr) - J_1(kr)/2kr = 0$ поле имеет тип D. На семействе линий

$$\sin \omega t J_1 = \pm \cos \omega t \left[\left(J_0 + \frac{J_1}{kr} \right) \left(J_0 - \frac{2J_1}{kr} \right) \right]^{1/2}$$

совпадают корни $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ и поле принадлежит к типу D всюду, за исключением точек с координатами $\cos \omega t = 0, J_1(kr) = 0$, где оно имеет тип 0. Отдельно отметим, что на оси $r=0$ поле принадлежит к типу D во все моменты времени, за исключением тех, когда $\cos \omega t = 0$, и поле имеет тип 0. Этим исчерпывается классификация метрики (2).

Подчеркнем, что поле обладает принципиально неустранимой «продольной» компонентой (сфера из пробных частиц деформируется волной в трехосный эллипсоид). Однако при $kr \rightarrow \infty$ вклад продольной компоненты становится сколь угодно малым. Действительно, рассмотрим метрику в области $kr \gg 1$. В главном по $(kr)^{-1}$ приближении из (3) получаем

$$\begin{aligned} h_{rr} &= -A(2/\pi)^{1/2} \cos \omega t (kr)^{-1/2} \cos(kr - 3/4\pi), \\ h_{\varphi\varphi} &= -A(2/\pi)^{1/2} \cos \omega t (kr)^{-1/2} \cos(kr - \pi/4), \\ h_{zz} &= A(2/\pi)^{1/2} \cos \omega t (kr)^{-1/2} \cos(kr - \pi/4), \end{aligned}$$

откуда видно, что при $kr \gg 1$ продольная компонента h_{rr} мала по сравнению с $h_{\varphi\varphi}$ и h_{zz} . Инварианты тензора кривизны приближенно равны

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= -1/2 A k^2 (2/\pi)^{1/2} \cos \omega t (kr)^{-1/2} \cos(kr - 3/4\pi), \\ \lambda^{(2), (3)} &= \pm 1/2 A k^2 (2/\pi)^{1/2} (kr)^{-1/2} [\cos(\omega t + kr - \pi/4) \cos(\omega t - kr + \pi/4)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Сохраняя в λ -матрице лишь главные члены, пропорциональные $(kr)^{-1/2}$, возвращаемся к рассмотренной выше картине плоских поперечных линейно-поляризованных стоячих волн. Поле принадлежит к типу I всюду, за исключением линий $\cos(\omega t + kr - \pi/4) = 0, \cos(\omega t - kr + \pi/4) = 0$, где оно принадлежит к типу N, а в точках пересечения этих линий поле имеет тип 0.

Цилиндрически-симметричные стоячие линейно-поляризованные электромагнитные волны обладают аналогичными свойствами.

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга
Москва

Поступило
13 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. З. Петров, Новые методы в общей теории относительности, «Наука», М., 1966. ² В. Д. Захаров, Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна, «Наука», М., 1972. ³ Р. Пенроуз, Структура пространства-времени, «Мир», 1972. ⁴ Л. П. Гришук, М. В. Сажин, ЖЭТФ, т. 68, № 5 (1975). ⁵ Л. Д. Ландау, Е. М. Луфшиц, Теория поля, «Наука», М., 1973. ⁶ С. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, San Francisco, 1973.