

УДК 517.53:513.881

МАТЕМАТИКА

А. А. ДАНИЛЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ АБСТРАКТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВ РЯДОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 14 I 1975)

В работах Г. Ц. Тумаркина ⁽¹⁾ получены условия, при которых из сходимости последовательности голоморфных функций $\{f_n(z)\}$ внутри единичного круга D следует сходимость граничных функций $f_n(e^{i\theta})$ по мере на единичной окружности. В данной статье с помощью теории абстрактных аналитических функций исследуются граничные свойства сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$$

голоморфных функций в D . Находятся достаточные условия, при которых почти всюду (п.в.) на ∂D

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{r \rightarrow 1} \varphi_n(re^{i\theta}). \quad (1)$$

Определение. Пусть E — пространство Фреше и $f(z)$ — аналитическая функция в единичном круге D со значениями в E ⁽²⁾. Будем говорить, что $f(z)$ принадлежит классу A в D , если для каждой полунормы $|\cdot|_p$ некоторой определяющей топологию системы полунорм в E

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|_p d\theta < K(p, f) < +\infty.$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть E — пространство Фреше, удовлетворяющее одному из следующих двух условий:

1) E рефлексивно;

2) E — сепарабельное пространство, сильно сопряженное к некоторому бочечному пространству.

Пусть, далее, $f(z)$ — функция класса A со значениями в E .

Тогда $f(z)$ имеет п.в. на единичной окружности угловые предельные значения.

С помощью этого результата становится возможным доказательство следующих теорем.

Теорема 2. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ — абсолютно сходящийся ряд голоморфных функций в единичном круге D и пусть

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(re^{i\theta})| \right) d\theta < K(\{\varphi_n\}) < +\infty. \quad (2)$$

Тогда функции $\varphi_n(z)$ имеют п.в. на ∂D угловые предельные значения $\varphi_n(e^{i\theta})$ и п.в.

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(e^{i\theta}).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f: D \rightarrow l_1$; $f(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z), \dots)$. В силу условия (2) $f(z)$ является аналитической функцией класса A . По теореме 1 существует такая функция $f(e^{i\theta})$, что п.в.

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}),$$

$$f(e^{i\theta}) = (a_1(e^{i\theta}), \dots, a_n(e^{i\theta}), \dots).$$

Для каждого линейного непрерывного функционала $x' \in l_1'$ имеем п.в.

$$\lim_{r \rightarrow 1} x'(f(re^{i\theta})) = x'(f(e^{i\theta})). \quad (3)$$

Подставляя в соотношение (3) линейные непрерывные функционалы $x'_i \in l_1'$,

$$x'_i(b_1, \dots, b_n, \dots) = b_i, \quad i = 1, \dots, n, \dots,$$

$$x'_0(b_1, \dots, b_n, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i,$$

получаем, что п.в. $a_n(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(e^{i\theta}).$$

З а м е ч а н и е. Справедлив и более сильный результат: для каждой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ в предположениях теоремы 2 имеем п.в.

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(e^{i\theta}).$$

Известно, что если производная от голоморфной функции

$$\varphi(z) = \sum_{n=j}^{\infty} a_n z^n$$

принадлежит классу Харди $H_1(D)$, то п.в.

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=j}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Следующая теорема является обобщением этого утверждения на функциональные ряды.

Т е о р е м а 3. Пусть

$$f(z, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \xi^n,$$

$f(z, \xi)$ — голоморфная функция двух переменных в бикруге D^2 и

$$\int_0^{2\pi} \left(\log^+ \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f(re^{i\theta}, re^{it})}{\partial \xi} \right| dt \right) d\theta < K(f) < +\infty.$$

Тогда функции $\varphi_n(z)$ принадлежат классу A , ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ абсолютно сходится в единичном круге D и п.в.

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(e^{i\theta}).$$

Доказательство этой теоремы основано на следующем утверждении, имеющем самостоятельное значение.

Лемма 1. Пусть $\Psi(z, \xi)$ — голоморфная функция в бикруге D^2 , удовлетворяющая следующему соотношению:

$$\int_0^{2\pi} \left(\log^+ \int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta}, re^{it})| dt \right) d\theta < K(\Psi) < +\infty.$$

Тогда функция $g: z \rightarrow \Psi(z, \xi)$ является аналитической со значениями в пространстве Харди $H_1(D)$ класса A .

Заметим, что $H_1(D)$ — сепарабельное пространство, сопряженное к некоторому банахову пространству ⁽³⁾.

Функция $f(z, \xi)$ будет голоморфной, если справедливо, например, одно из следующих условий:

1) функции $\varphi_n(z)$ голоморфны в единичном круге D и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\max_{\theta} |\varphi_n(re^{i\theta})|)^{1/n} \leq 1;$$

2) последовательность голоморфных функций $\{\varphi_n(z)\}$ равномерно ограничена внутри D ;

3) функции $\varphi_n(z)$ принадлежат классу $H_1(D)$ и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{2\pi} |\varphi_n(re^{i\theta})| d\theta \right)^{1/n} \leq 1.$$

Каждую голоморфную функцию двух комплексных переменных, заданную в области D^2 , можно рассматривать как аналитическую функцию в круге D со значениями в пространстве Фреше всех голоморфных функций в D . Это замечание приводит к следующим результатам.

Теорема 4. Пусть $f(z, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \xi^n$ — голоморфная функция в бикруге D^2 и

$$\int_0^{2\pi} \log^+ (\max_{\xi \in B_n} |f(re^{i\theta}, \xi)|) d\theta < K(f, n) < +\infty,$$

где B_n — компактное исчерпание единичного круга D .

Тогда функции $\varphi_n(z)$ п.в. на ∂D имеют угловые предельные значения и для каждой последовательности $\{l_n\}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (l_n)^{1/n} < 1$,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} l_n \varphi_n(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n \varphi_n(e^{i\theta}).$$

Теорема 5. Если $f(z, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \xi^n$ — голоморфная функция в области $D_1 \times D_R = \{(z, \xi): |z| < 1; |\xi| < R, R > 1\}$, не принимающая двух значений в C , и существует такое $r_0 < 1$, что

$$\int_0^{2\pi} \log^+ (\max_{|\xi|=r_0} |f(re^{i\theta}, \xi)|) d\theta < K(f) < +\infty,$$

то функции $\varphi_n(z)$ п.в. имеют угловые предельные значения и выполняется соотношение (1).

З а м е ч а н и е. Исследуя различные представления последовательности $\{\varphi_n(z)\}$ в топологических векторных пространствах, можно получить еще ряд результатов, касающихся граничных свойств голоморфных функций.

Автор выражает признательность Е. Д. Соломенцеву за внимание к работе.

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
9 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Ц. Тумаркин, Современные проблемы теории аналитических функций, Сб. статей, М., 1966. ² Р. Эдвардс, Функциональный анализ, М., 1969, стр. 774
³ К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963, стр. 195.