

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Дж. И. МАМЕДХАНОВ

КОНСТРУКТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Пусть $w = \varphi(z)$ отображает внешность замкнутой спрямляемой кривой Жордана Γ на внешность единичной окружности $\gamma (|w|=1)$ так, что $\varphi(\infty) = \infty$, и $z = \psi(w)$ — функция, обратная к $w = \varphi(z)$. Обозначим через $d(z; \rho)$ расстояние от кривой Γ до ее линии уровня $\Gamma_{1+\rho}$ ($\rho > 0$), т. е. $d(z; \rho) = \min_{t \in \Gamma_{1+\rho}} |z - t|$, и через $L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$, — пространство измеримых на Γ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p} < +\infty.$$

Далее, пусть D — область, заключенная внутри Γ , $E_p(D)$, $p \geq 1$, — класс В. И. Смирнова ⁽¹⁾, $H_{\Gamma}^{\omega, r}$, $r = 0, 1, 2, \dots$, — класс функций $f(z) \in E_p(D)$, имеющих производную $f^{(r)}(z)$ на Γ с модулем непрерывности

$$\omega_p^*(f^{(r)}; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \left(\int_{\Gamma} |f^{(r)}(z_h) - f^{(r)}(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad z_h = \psi[\varphi(z)e^{ih}],$$

который удовлетворяет условию *

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_p^*(f^{(r)}; t)}{t} dt \leq \omega_p^*(f^{(r)}; \delta). \quad (1)$$

В частности, через $H_{\Gamma}^{r+\alpha} E_p(D)$, $0 < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$, обозначается класс тех же функций $f(z) \in E_p(D)$, для которых (1) заменяется условием

$$\omega_p^*(f^{(r)}; \delta) \leq \delta^{\alpha}. \quad (2)$$

В дальнейшем через $A_{p, \omega}^{(r)}$ (а также через $A_{1, \alpha}^{(r)}$), $p > 1$, обозначается совокупность всех замкнутых кривых Γ , на которых при любых $f(z) \in H_{\Gamma}^{\omega, r} E_p(D)$ (соответственно при любых $f(z) \in H_{\Gamma}^{\omega, r} E_p(D)$) для оператора

$$S[f; t] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - t}, \quad t \in \Gamma, \quad (3)$$

выполняется соотношение

$$\|S[f; t]\|_{L_p(\Gamma)} \leq \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad p > 1. \quad (4)$$

Очевидно, класс $A_{p, \omega}^{(r)}$ содержит в себе класс $A_{p, \omega}^{(r)}$, и каждый из них содержит в себе известный класс R_p замкнутых кривых Γ , для которых выполняется неравенство (4) при любых $f(z) \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ **.

* Здесь $l(\delta) \leq \beta(\delta)$ означает, что $l(\delta) \leq A\beta(\delta)$, где A — постоянная, не зависящая от δ .

** Исследования о кривых класса R_p приведены в работе ⁽⁸⁾, стр. 244–295. Необходимое и достаточное условие принадлежности данной кривой Γ к классу R_p , $1 < p < \infty$, пока неизвестно.

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Дж. И. МАМЕДХАНОВ

КОНСТРУКТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Пусть $w = \varphi(z)$ отображает внешность замкнутой спрямляемой кривой Жордана Γ на внешность единичной окружности $\gamma (|w|=1)$ так, что $\varphi(\infty) = \infty$, и $z = \psi(w)$ — функция, обратная к $w = \varphi(z)$. Обозначим через $d(z; \rho)$ расстояние от кривой Γ до ее линии уровня $\Gamma_{1+\rho} (\rho > 0)$, т. е. $d(z; \rho) = \min_{t \in \Gamma_{1+\rho}} |z - t|$, $z \in \Gamma$, и через $L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$, — пространство измеримых на Γ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p} < +\infty.$$

Далее, пусть D — область, заключенная внутри Γ , $E_p(D)$, $p \geq 1$, — класс В. И. Смирнова ⁽¹⁾, $H_{\Gamma}^{\omega, r}$, $r = 0, 1, 2, \dots$, — класс функций $f(z) \in E_p(D)$, имеющих производную $f^{(r)}(z)$ на Γ с модулем непрерывности

$$\omega_p^*(f^{(r)}; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \left(\int_{\Gamma} |f^{(r)}(z_h) - f^{(r)}(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad z_h = \psi[\varphi(z)e^{ih}],$$

который удовлетворяет условию *

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_p^*(f^{(r)}; t)}{t} dt \leq \omega_p^*(f^{(r)}; \delta). \quad (1)$$

В частности, через $H_{\Gamma}^{\alpha, r} E_p(D)$, $0 < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$, обозначается класс тех же функций $f(z) \in E_p(D)$, для которых (1) заменяется условием

$$\omega_p^*(f^{(r)}; \delta) \leq \delta^{\alpha}. \quad (2)$$

В дальнейшем через $A_{p, \omega}^{(r)}$ (а также через $A_{1, \omega}^{(r)}$), $p > 1$, обозначается совокупность всех замкнутых кривых Γ , на которых при любых $f(z) \in H_{\Gamma}^{\omega, r} E_p(D)$ (соответственно при любых $f(z) \in H_{\Gamma}^{\omega, r} E_p(D)$) для оператора

$$S[f; t] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - t}, \quad t \in \Gamma, \quad (3)$$

выполняется соотношение

$$\|S[f; t]\|_{L_p(\Gamma)} \leq \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad p > 1. \quad (4)$$

Очевидно, класс $A_{p, \alpha}^{(r)}$ содержит в себе класс $A_{p, \omega}^{(r)}$, и каждый из них содержит в себе известный класс R_p замкнутых кривых Γ , для которых выполняется неравенство (4) при любых $f(z) \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ **.

* Здесь $l(\delta) \leq \beta(\delta)$ означает, что $l(\delta) \leq A\beta(\delta)$, где A — постоянная, не зависящая от δ .

** Исследования о кривых класса R_p приведены в работе ⁽⁸⁾, стр. 211–295. Необходимое и достаточное условие принадлежности данной кривой Γ к классу R_p , $1 < p < \infty$, пока неизвестно.

Наконец, обозначим через J (через J_1) множество ограниченных областей D с односвязным дополнением и с границей $\Gamma \in A_{p,\omega}^{(r)}$ (соответственно с границей $\Gamma \in A_p^{(1)}$).

В этой статье дается характеристика класса $H_\Gamma^\alpha E_p(D)$, $0 < \alpha < 1$, $p > 1$, функций $f(z)$ посредством наилучшего приближения:

$$\rho_n^{(p)}(f; \Gamma) = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \left(\int_\Gamma |f(z) - P_n(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad \Gamma \in A_{p,\omega}^{(0)},$$

где $\mathcal{P}_n$ — множество всех многочленов $P_n(z)$ степени n .

Приводятся также прямые теоремы аппроксимации для функций из классов $H_\Gamma^{\omega,r} E_p(D)$ и $H_\Gamma^{r+\alpha} E_p(D)$, $p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$, на кривых Γ , принадлежащих соответственно $A_{p,\omega}^{(r)}$ и $A_{p,\alpha}^{(r)}$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Если область D из класса J и $f(z) \in H_\Gamma^{\omega,r} E_p(D)$, $p > 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$, то при каждом натуральном n существует многочлен $P_n(z)$ такой, что

$$\|f(z) - P_n(z)\|_{L_p(\Gamma)} \leq \frac{1}{n^r} \omega_p \left(f^{(r)}; \frac{1}{n} \right).$$

Теорема 2. Если область D из класса J , и $f(z) \in H_\Gamma^{r+\alpha} E_p(D)$, $p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$, то при каждом натуральном n существует многочлен $P_n(z)$ такой, что

$$\|f(z) - P_n(z)\|_{L(p)\Gamma} \leq \frac{1}{n^{r+\alpha}}.$$

Замечание 1. Подобные утверждения для областей D с аналитической границей Γ доказаны в работе (2). Кроме того аналогичная задача рассматривалась в работе (3) в предположении, что граница Γ области D такова, что угол $\theta(s)$ между касательными к Γ и фиксированным направлением, как функция дуги s кривой Γ , обладает модулем непрерывности

$$\omega(\theta; \delta) = \sup_{|s_1 - s_2| \leq \delta} |\theta(s_1) - \theta(s_2)|,$$

удовлетворяющим условию

$$\int_0^a \frac{\omega(\theta, t)}{t} dt < +\infty, \quad a > 0. \quad (5)$$

Отметим, что класс кривых, для которых выполняется соотношение (5), входит в класс R_p (см., например, (8)).

Замечание 2. Теорема 1 в частном случае при $r = 0$ для областей D с границей Γ из класса R_p , $1 < p < \infty$, сформулирована в терминах k -го модуля непрерывности в работе (7). Кроме того вопросы приближения, в частности, для областей D с границей Γ , удовлетворяющей условию (5), рассматривались в работах (4-6).

Обозначим еще через $\tilde{A}_{p,\alpha}^{(0)}$ класс кривых Γ , принадлежащих $A_{p,\alpha}^{(0)}$ и удовлетворяющих условию

$$|\psi'(w)| \leq \frac{1}{\rho} d[\psi(w); \rho], \quad \rho > 0, \quad (6)$$

а через $\tilde{J}$ — множество ограниченных областей с односвязным дополнением и с контуром $\Gamma \in \tilde{A}_{p,\alpha}^{(0)}$.

Замечание 3. Класс кривых A , введенных В. К. Дзядыком (см. (9, 10)), принадлежит к классу $\tilde{A}_{p,\alpha}^{(0)}$.

Теорема 3. Пусть область D принадлежит множеству J_1 , $f(z) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, и для каждого натурального n существует $P_n(z) \in \mathcal{P}_n$ такой, что

$$\|f(z) - P_n(z)\|_{L_p(\Gamma)} \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда существует аналитическая в области D функция $f(z)$, угловые предельные значения которой на Γ , взятые изнутри, равны почти всюду $f(\xi)$, $\xi \in \Gamma$, и, кроме того, $f(z) \in H_{\Gamma}^\alpha E_p(D)$, $0 < \alpha < 1$, $p > 1$.

Таким образом, из теоремы 2 при $r=0$ и из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. Для того чтобы функция $f(z) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, где $\Gamma \in \bar{A}_{p,\alpha}^{(0)}$, $\alpha > 1$, имела наилучшее приближение $\rho_n^{(p)}(f; \Gamma)$, удовлетворяющее при всех n , $n=1, 2, \dots$, равенству *

$$\rho_n^{(p)}(f; \Gamma) \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad p > 1, \quad (7)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(z) \in H_{\Gamma}^\alpha E_p(D)$, $0 < \alpha < 1$.

Замечание 4. Заметим, что из справедливости (7) при $\alpha=1$ не следует, что $f(z) \in H_{\Gamma}^1 E_p(D)$. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев при $p=2$ функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^{-3/2} z^k$$

в единичном круге.

В случае $\alpha=1$ имеет место следующая

Теорема 5. Если область D из класса J_1 и $f(z) \in E_p(D)$, $p > 1$, то для выполнения неравенства

$$\omega_p^*(f; \delta) \leq \delta$$

достаточно, чтобы сходилась ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{(p)}(f; \Gamma).$$

Замечание 5. При доказательстве обратных теорем аппроксимации существенное место занимают оценки, приведенные в работах ^(11, 12).

Замечание 6. Вопросы, связанные с обратимостью теоремы 2 при любых r , $r=0, 1, 2, \dots$, будут рассмотрены в другой нашей статье.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
24 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950. ² J. Walsh, H. Russel, Trans. Am. Math. Soc. v. 92, № 2 (1959). ³ С. Я. Альпер, Исследование по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1960, стр. 273. ⁴ М. И. Андрашко, Вопросы математической физики и теории функций, Киев, № 1, 1964. ⁵ Д. М. Галан, Доп. АН УРСР, А, № 8, 673 (1967). ⁶ В. М. Кокилашвили, ДАН, т. 177, № 2, 261 (1967). ⁷ В. М. Кокилашвили, ДАН, т. 185, № 4 (1969). ⁸ А. Г. Джваршейшвили, Б. В. Хведелидзе, История отечественной математики, т. 4, кн. 1, Киев, 1970. ⁹ В. К. Дзядык, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, 697 (1959). ¹⁰ В. К. Дзядык, Г. А. Алибеков, Матем. сб., т. 75 (117), № 4, 502 (1968). ¹¹ Дж. И. Мамедханов, ДАН, т. 214, № 1 (1974). ¹² Дж. И. Мамедханов, ДАН, т. 217, № 3 (1974).

* Аналогичное утверждение при $p=\infty$ в областях, границы которых являются кривыми из специального класса A , получено в работе ⁽¹⁰⁾.