

В. М. КАЛИНИН

ЧАСТОТНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 26 IV 1974)

Существующие оценки точности численного интегрирования уравнений являются весьма грубыми ⁽¹⁾. Показывается возможность получить более точные оценки на основе частотных методов ⁽²⁾.

Если $x_k(t)$ — точные, а $\tilde{x}_k(t)$ — численные решения системы

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u_k(t)), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

получаемые при заданных $x_k(0)$ и $u_k(t)$ каким-либо известным методом численного интегрирования, то текущая погрешность интегрирования

$$\delta x_k(t) = \tilde{x}_k(t) - x_k(t) \quad (2)$$

представляет процесс, показатели которого (максимум, колебательность и др.) характеризуют точность и качество численного решения. Рассматривается задача априорного (без решения (1)) определений показателей (2), распространяемая на различные алгоритмы численного интегрирования при решении линейных или линеаризуемых систем (1).

1°. Полагая, что все $u_k(t)$ и $x_k(t)$ абсолютно интегрируемы и численные решения устойчивы, при $x_k(0)=0$ можно записать

$$A \cdot S\tilde{x}(\omega) = B S\tilde{u}(\omega), \quad (3)$$

где $S\tilde{x}(\omega)$ и $S\tilde{u}(\omega)$ — столбцы размера $n \times 1$ частотных спектров

$$S\tilde{x}_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_k(t) e^{-i\omega t} dt, \quad S\tilde{u}_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_k(t) e^{-i\omega t} dt,$$

A и B — квадратные матрицы порядка $n \times n$, причем A — с диагональными элементами $\bar{W}_k(\omega)$ и остальными ε_{kq} , $k \neq q$, B — диагональная матрица из элементов γ_k ,

$$\bar{W}_k(\omega) = \frac{M_k(e^{i\bar{\omega}})}{N_k(e^{i\bar{\omega}})} \quad \varepsilon_{kq} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_q} \right)^* \Delta t, \quad \gamma_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_k} \right)^* \Delta t,$$

M_k , N_k — квазиполиномы от положительных степеней $e^{i\bar{\omega}}$ (их коэффициенты зависят только от $\varepsilon_{kq} = |\varepsilon_{kq}|$ при $q=k$), $\bar{\omega} = \omega \Delta t$, ω — частота, Δt — шаг, $k, q=1, 2, \dots, n$. $\bar{W}_k(\omega) = 1/W_k(\omega)$ — обратные частотные характеристики подсистем численного решения отдельных уравнений.

Решив (3) относительно столбца $S\tilde{x}(\omega)$, получаем

$$S\tilde{x}(\omega) = W \cdot S\tilde{u}(\omega) \quad \text{или} \quad S\tilde{x}_k(\omega) = \sum_{q=1}^n W_{kq}(\omega) \cdot S\tilde{u}_q(\omega), \quad (4)$$

где W — матрица порядка $n \times n$ из элементов $W_{kq}(\omega)$, представляющих собой частотные характеристики всех каналов системы численного интегри-

рования (1). Функции $W_{kq}(\omega)$ принадлежат к тому же классу, что и $W_k(\omega)$. Обозначение аргумента ω у W и S в дальнейшем опускается.

2°. В силу сходимости численных решений к точным, для спектров погрешности имеем

$$\delta S_k = S\tilde{x}_k - Sx_k = \sum_{q=1}^n (W_{kq} \cdot S\tilde{u}_q - (\lim_{\Delta t \rightarrow 0} W_{kq}) \cdot Su_q). \quad (5)$$

Применение к (5) обратного преобразования Фурье дает

$$\delta x_k(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{kq} \cdot S\tilde{u}_q - (\lim_{\Delta t \rightarrow 0} W_{kq}) \cdot Su_q) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6)$$

Если погрешность рассматривается только в существенном диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$, то пределы интегрирования заменяются на $\pm \omega_{\max}$.

Для типового входного сигнала $u_1(t)$ в виде единичного скачка имеем

$$\delta x_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{Re} W_2 - \operatorname{Re} W_1) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (7)$$

где $W_2 = W_{kq} \cdot S\tilde{u}_q / Su_q$, $W_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} W_{kq}$.

Задача, таким образом, сведена к уже имеющей решение задаче анализа качества переходных процессов в линейных системах по их вещественным частотным характеристикам. Согласно (3) возможна оценка

$$\max |\delta x_k(t)| \leq 1,18N^{1/2} \cdot \max |\operatorname{Re} W_2 - \operatorname{Re} W_1|, \quad (8)$$

где N — число экстремумов модуля разности $\operatorname{Re} W_2 - \operatorname{Re} W_1$ на отрезке $0 \leq \omega \leq \pi/\Delta t$.

При $u_k(t) = \cos \omega_0 t$, $t \leq \pm \infty$, формула (6) дает выражение текущей погрешности интегрирования в конечном виде — без интегралов

$$\delta x_k(t) = [(\operatorname{Re}_2 - \operatorname{Re}_1)^2 + (\operatorname{Im}_2 - \operatorname{Im}_1)^2]^{1/2} \cos \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}_2 - \operatorname{Im}_1}{\operatorname{Re}_2 - \operatorname{Re}_1} \right); \quad (9)$$

здесь для сокращения записи обозначено $\operatorname{Re}_2 = \operatorname{Re} W_{kq}(\omega_0)$, $\operatorname{Im}_2 = \operatorname{Im} W_{kq}(\omega_0)$, $\operatorname{Re}_1 = \operatorname{Re} W_1(\omega_0)$, $\operatorname{Im}_1 = \operatorname{Im} W_1(\omega_0)$.

Как следствие из (9) записываются выражения для отдельных показателей текущей погрешности: максимальной $\delta_{\max}$, фазовой δ_b , амплитудной δ_a . Относительные погрешности, отнесенные к амплитудам точного решения a_0 и a на нулевой и текущей частотах, обозначены ниже $\delta'_{\max}$, δ'_a и $\delta_{\max}$, δ_a .

3°. Применение полученных формул иллюстрируется на примерах интегрирования систем уравнений некоторых типов (во всех случаях системы приведены к нормальной форме Коши).

а) Изолированные уравнения и системы, содержащие только параллельные соединения.

Пример 1. Для алгоритма Эйлера

$$W_2 = \frac{\gamma_k}{e^{i\bar{\omega}} - 1 + \varepsilon_{kk}}.$$

Относительная амплитудная и фазовая погрешности

$$\delta_a = \left[\frac{\varepsilon_{kk}^2 + \bar{\omega}^2}{\varepsilon_{kk}^2 + 2(1 - \varepsilon_{kk})(1 - \cos \bar{\omega})} \right]^{1/2} - 1, \quad \delta_b = \operatorname{arctg} \frac{\bar{\omega}}{\varepsilon_{kk}} - \operatorname{arctg} \frac{\sin \bar{\omega}}{\varepsilon_{kk} - 1 + \cos \bar{\omega}} \approx \frac{\bar{\omega}}{2}.$$

На характерной частоте $\bar{\omega} = \varepsilon_{kk}$ имеем $\delta_a \approx \varepsilon_{kk}/4$.

Для «астатических» уравнений, у которых $\varepsilon_{hk}=0$ (при $\Delta t \neq 0$),

$$\delta_{\max} = \frac{\bar{\omega}}{2} \left[1 + \left(\frac{2}{\bar{\omega}} - \frac{1}{\operatorname{tg}(\bar{\omega}/2)} \right)^{1/2} \right] \approx \frac{\bar{\omega}}{2}, \quad \delta_a = \frac{\bar{\omega}/2}{\sin(\bar{\omega}/2)} - 1 \approx \frac{\bar{\omega}^2}{24}.$$

Во всех формулах приближенные равенства относятся к области $\varepsilon_{hk} \ll 1$ и $\bar{\omega} \ll 1$.

Пример 2. Для алгоритма Рунге — Кутты

$$W_2 = \gamma_h \frac{b_1 e^{i\bar{\omega}} + b_{0,5} e^{i \cdot 0,5 \bar{\omega}} + b_0}{e^{i\bar{\omega}} - \varphi}$$

причем $b_1 = 1/6$, $b_{0,5} = 2/3 - 1/3 \varepsilon_{hk} + 1/12 \varepsilon_{hk}^2$, $b_0 = 1/6 - 1/6 \varepsilon_{hk} + 1/12 \varepsilon_{hk}^2 - 1/24 \varepsilon_{hk}^3$, $\varphi = 1 - \varepsilon_{hk} + 1/2 \varepsilon_{hk}^2 - 1/6 \varepsilon_{hk}^3 + 1/24 \varepsilon_{hk}^4$. Относительная погрешность по амплитуде

$$\delta_a = \sqrt{(\varepsilon_{hk}^2 + \bar{\omega}^2) \frac{(b_1 + b_0 + b_{0,5})^2 - 4b_{0,5}(b_1 + b_0) + 4b_0 b_1 z}{(1 - \varphi)^2 + 4\varphi z^2}} - 1,$$

где $z = \sin(\bar{\omega}/2)$.

Для «астатических» уравнений (при $\varepsilon_{hk}=0$)

$$\delta_a = \frac{\bar{\omega}/2}{\sin(\bar{\omega}/2)} \frac{2 + \cos(\bar{\omega}/2)}{3} - 1.$$

б) Последовательные цепи из n уравнений. Для таких цепей при $k=n$, $q=1$ имеем

$$W_2 = W_{kq} = \varepsilon_n^n \prod_{k=1}^n W_k, \quad W_1 = \frac{\varepsilon_n^n}{\prod_{k=1}^n (i\bar{\omega} + \varepsilon_{kk})}, \quad \varepsilon_n^n = \prod_{k=1}^n \varepsilon_{k(k-1)},$$

причем $\varepsilon_{1(1-1)} = \gamma_1$. Поскольку в этом случае

$$(\operatorname{Re}_{kq}^2 + \operatorname{Im}_{kq}^2) = \varepsilon_n^{2n} \prod_{k=1}^n (\operatorname{Re}_k^2 + \operatorname{Im}_k^2),$$

то для последнего (n -го) уравнения цепи получаем

$$(\delta_a)_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon_{kk}^2 + \bar{\omega}^2}{\operatorname{Re}_k^2 + \operatorname{Im}_k^2} \right)^{1/2} - 1 \approx \sum_{k=1}^n (\delta_a)_k,$$

где $(\delta_a)_k$ — погрешности решения отдельно взятых уравнений (предполагается $(\delta_a)_k \ll 1$, $k=1, 2, \dots, n$). Относительная амплитудная погрешность, отнесенная к амплитуде точного решения на нулевой частоте

$$\begin{aligned} (\delta_a')_n &= \prod_{k=1}^n (\bar{\operatorname{Re}}_k^2 - \bar{\operatorname{Im}}_k^2)^{1/2} - \prod_{k=1}^n \frac{\varepsilon_{kk}}{\sqrt{\varepsilon_{kk}^2 + \bar{\omega}^2}} \approx \\ &\approx \prod_{k=1}^n \frac{\varepsilon_{kk}}{(\varepsilon_{kk}^2 + \bar{\omega}^2)^{1/2}} \sum_{k=1}^n \frac{(\varepsilon_{kk}^2 + \bar{\omega}^2)}{\varepsilon_{kk}} (\delta_a')_k. \end{aligned}$$

В частности, при одинаковых «постоянных времени» всех уравнений $\varepsilon_{kk} = \varepsilon$, $k=1, 2, \dots, n$, на характерной частоте $\bar{\omega} = \varepsilon$ имеем

$$(\delta_a')_n = \frac{n}{2^{(n-1)/2}} (\delta_a')_k.$$

Видно, что относительная погрешность при увеличении длины цепи в коротких цепях ($n < 6$) растет, а в длинных ($n > 7$) уменьшается, при этом растет погрешность всегда медленнее, чем длина цепи n .

в) Одноконтурные системы из n уравнений. Для канала $u_1 \rightarrow x_n$ в таких системах

$$W_2 = \frac{\varepsilon_{11}^n \prod_{k=1}^n W_k}{\varepsilon_{oc}^n \prod_{k=1}^n W_k + 1}, \quad W_1 = \frac{\varepsilon_{11}^n}{\varepsilon_{oc}^n + \prod_{k=1}^n (i\bar{\omega} + \varepsilon_{kk})}, \quad \varepsilon_{oc}^n = - \prod_{k=1}^n \varepsilon_{k(k-1)},$$

причем $\varepsilon_{1(1-1)} = \varepsilon_{1n}$.

В одноконтурных системах ошибки интегрирования зависят также от величины $K = \varepsilon_{oc}^n: \prod_{k=1}^n \varepsilon_{kk}$, представляющей собой коэффициент усиления контура; при этом вблизи резонансной частоты погрешности интегрирования увеличиваются.

Пример. Для алгоритма Эйлера

$$W_2 = \frac{\varepsilon_{11}^n}{\varepsilon_{oc}^n + \prod_{k=1}^n (e^{i\bar{\omega}} - 1 + \varepsilon_{kk})}.$$

При $\varepsilon_{kk} = \varepsilon \ll 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, на характерной частоте $\bar{\omega} = \varepsilon$ имеем

$$\delta_a = \left\{ \frac{K^2 + 2^{(n+2)/2} K \cos(\pi n/4) + 2^n}{K^2 + 2K[(1 - 0,5\varepsilon)^2 + 1]^{0,5n} \cos\left(n \arctg \frac{1}{1 - 0,5\varepsilon}\right) + [(1 - 0,5\varepsilon) + 1]^n} \right\}^{-1},$$

где n — порядок системы, K — коэффициент усиления контура (формула справедлива для устойчивых систем с $K \leq [\operatorname{tg}(\pi/n) + 1]^{n/2}$). Например, для $n = 3$, $\varepsilon = 0,03$ максимум погрешности при $K = 2$ составляет $\sim 5\%$.

Для систем второго порядка ($n = 2$) максимум δ_a имеет место при $\bar{\omega} = \varepsilon(K - 1)^{1/2}$ и приближенно определяется соотношением

$$(\delta_a)_{\max} \approx \varepsilon_g \text{ при } \varepsilon_g \ll 1,$$

где $\varepsilon_g = \Delta t / \tau_g$, τ_g — «постоянная времени», характеризующая демпфирование системы (при форме записи характеристического уравнения $\tau_m^2 p^2 + \tau_g p + 1 = 0$).

Поступило
24 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., 1962. ² Б. Н. Петров, Современные методы проектирования систем автоматического управления, М., Машиностроение, 1967. ³ В. В. Солодовников, Автоматика и телемеханика, № 1 (1950).