

А. Н. ГОДУНОВ, А. Н. СОЛОВЬЕВ

ЯВЛЕНИЕ ГИББСА И АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 VII 1974)

Явлением Гиббса принято называть своеобразный дефект сходимости частных сумм ряда Фурье вблизи точки разрыва функции. Аналогичный факт может иметь место и при суммировании рядов Фурье различными линейными методами. В этом случае также говорят о явлении Гиббса. Для методов суммирования Хаусдорфа О. Сас ⁽¹⁾ свел вопрос о наличии явления Гиббса к исследованию некоторого интеграла Стильтьеса. Аналогичный результат для треугольных методов суммирования, удовлетворяющих некоторым специальным условиям, получен в ^(2, 3). Ниже, в теореме 1, такой же интеграл получен для произвольного регулярного метода суммирования рядов Фурье. Этот интеграл исследовали Манн ⁽⁴⁾, а также С. А. Агаханов и Г. И. Натансон ⁽²⁾ при различных условиях на весовую функцию. В теореме 2 мы изучаем его при других условиях. Прямым следствием теоремы 2 является результат, доказанный Г. И. Натансоном для методов суммирования Валле — Пуссена ⁽⁵⁾.

Пусть W_{α}^2 обозначает класс дважды дифференцируемых 2π -периодических функций, вторая производная которых удовлетворяет условию Липшица порядка α . Наилучший порядок приближения тригонометрическими полиномами на этом классе функций $O(1/n^{2+\alpha})$. П. П. Коровкин ⁽⁶⁾ доказал, что положительными линейными методами суммирования рядов Фурье нельзя достичь на этом классе порядка приближения выше, чем $O(1/n^2)$. Ниже доказано, что если метод дает порядок приближения $O(1/n^{2+\alpha})$ на классе W_{α}^2 , то он не только не является положительным, но имеет еще и явление Гиббса. Можно построить метод, не имеющий явления Гиббса и дающий на указанном классе порядок приближения $O(\varphi(n)/n^{2+\alpha})$, где $\varphi(n)$ — любая наперед заданная функция, стремящаяся к бесконечности с ростом n .

Пусть линейный метод суммирования задан треугольной матрицей чисел $\lambda_k^{(n)}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$; $n=1, 2, 3, \dots$. Будем предполагать, что для нее выполнено естественное условие $\lambda_0^{(n)}=1$, $n=0, 1, 2, \dots$, а также условие регулярности

$$\sum_{h=0}^{n-1} |\Delta \lambda_h^{(n)}| \leq C, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

где C — некоторая постоянная, а $\Delta \lambda_h^{(n)} = \lambda_h^{(n)} - \lambda_{h+1}^{(n)}$. Очевидно, из регулярности следует

$$|\lambda_k^{(n)}| \leq C+1, \quad k=0, 1, 2, \dots, n; \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Определение. Говорят, что линейный метод суммирования рядов Фурье имеет явление Гиббса, если существует такая стремящаяся

к нулю последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \frac{\sin kx_n}{k} > \frac{\pi}{2}.$$

Обозначим

$$\sigma_n(A) = \frac{x_n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \frac{\sin kx_n}{k}, \quad x_n = \frac{A}{n}, \quad A > 0.$$

Рассмотрим последовательность $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ступенчатых функций, связанных с матрицей метода суммирования:

$$h_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \frac{1}{2n}; \\ \lambda_k^{(n)} & \text{при } \frac{2k-1}{2n} \leq t < \frac{2k+1}{2n}, \quad k=1, 2, \dots, n-1; \\ \lambda_n^{(n)} & \text{при } \frac{2n-1}{2n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Теорема 1. Для каждого регулярного линейного метода суммирования рядов Фурье из соответствующей ему последовательности ступенчатых функций $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся всюду на отрезке $[0, 1]$ к некоторой функции $\psi(t)$ ограниченного изменения такой, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(A) \geq \int_0^1 \frac{\sin At}{t} \psi(t) dt. \quad (1)$$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(t) = \frac{\psi(t)-1}{t}$ при $0 < t \leq 1$, $\varphi(0) = 0$;

тогда из формулы (1) получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(A) \geq \text{Si}(A) + \int_0^1 \varphi(t) \sin At dt. \quad (2)$$

Теорема 2. Если линейному методу суммирования рядов Фурье отвечает функция $\varphi(t)$ такая, что ее нижняя правая производная в нуле больше, чем $-\pi^2/12$, то метод имеет явление Гиббса.

Доказательство. В силу соотношения (2) достаточно доказать, что

$$\int_0^1 \varphi(t) \sin At dt + \text{Si}(A) > \pi/2$$

при некотором $A > 0$. Предположим противное. Тогда при всех $A > 0$ выполнено

$$\int_0^1 \varphi(t) \sin At dt + \text{Si}(A) - \pi/2 \leq 0. \quad (3)$$

Интегрированием по частям получим

$$-\frac{\pi}{2} - \text{Si}(A) = \int_A^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos A}{A} + \frac{\sin A}{A^2} - 2 \int_A^{\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt. \quad (4)$$

Пусть A принимает значения $k\pi$, $k=1, 2, \dots$, тогда из (3) и (4) получаем

$$a_k = \int_0^1 \varphi(t) \sin k\pi t dt - \frac{(-1)^k}{k\pi} + 2 \int_{k\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt \leq 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (5)$$

Будем считать, что функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[0, 1]$, продолжена нечетным образом на отрезок $[-1, 1]$. Тогда ее коэффициенты Фурье имеют вид

$$b_k = \int_{-1}^1 \varphi(t) \sin k\pi t dt = 2 \int_0^1 \varphi(t) \sin k\pi t dt, \quad k=1, 2, \dots$$

ее нижняя правая производная в нуле равна $D\varphi(0)$. Интегрированием по частям можно доказать, что

$$c_k = \int_{k\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt = O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

Таким образом, ряд $4 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi t$ сходится равномерно на отрезке $[-1, 1]$ к некоторой функции $\varphi_0(t)$, а ряд $4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k c_k \cos k\pi t$ сходится равномерно к $\varphi'_0(t)$. Можно вычислить, что сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{k\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt = \frac{\pi}{48} - \frac{1}{4\pi},$$

т. е.

$$\varphi'_0(0) = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k c_k = \frac{\pi^2}{12} - 1.$$

Теперь ясно, что выражение $2a_k$ является синус-коэффициентом Фурье нечетной функции $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \varphi_0(t) + t$ на отрезке $[-1, 1]$. Очевидно, $D\varphi_1(0) = D\varphi(0) + \pi^2/12$. Сформулируем утверждение, являющееся аналогом теоремы Фату (7). Пусть функция $f(t)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и функция $tf(t)$ суммируема. Тогда, если $f(0) = 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^k \int_0^1 f(t) \sin k\pi t dt \geq \frac{1}{2\pi} D\varphi(0).$$

Применяя это утверждение к функции φ_1 , получаем

$$D\varphi(0) + \frac{\pi^2}{12} \leq 2\pi \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} k r^k a_k.$$

Правая часть последнего неравенства неположительна в силу неравенства (5), а левая положительна по условию. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим, что для всякого метода суммирования, удовлетворяющего условиям теоремы 1 из (2) при $m > 0$, выполнено условие теоремы 2.

Пример. Для метода суммирования Валле — Пуссена

$$\lambda_k^{(n+m-1)} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0, 1, \dots, n; \\ \frac{n+m-k}{m} & \text{при } k=n+1, \dots, n+m-1. \end{cases}$$

Будем, как в работе ⁽⁵⁾, считать, что m и n суть функции натурального параметра p , причем $\lim_{p \rightarrow \infty} (m+n) = \infty$, и существует $\lim_{p \rightarrow \infty} (n/m) = \alpha$. В этом случае очевидно, что $\psi(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \alpha/(\alpha+1)$ и $\psi(1) = 0$, а при $\alpha/(\alpha+1) \leq t \leq 1$ функция линейна. Таким образом, если $\alpha > 0$, то $\phi(t) = 0$ при $0 \leq t \leq \alpha/(\alpha+1)$ и, следовательно, $\phi'(0) = 0$. По теореме 2 мы получаем отсюда, что метод суммирования Валле — Пуссена имеет явление Гиббса при $\alpha > 0$. В этом и состоит утверждение теоремы 1 из ⁽⁵⁾.

Следствие 1. Если матрица регулярного метода суммирования удовлетворяет условию

$$|1 - \lambda_k^{(n)}| \leq H \left(\frac{k}{n} \right)^\alpha, \quad k=0, 1, \dots, n; \quad n=1, 2, \dots, \alpha > 2, \quad H > 0,$$

то метод имеет явление Гиббса.

Следствие 2. Всякий регулярный метод суммирования рядов Фурье, дающий наилучший порядок приближения на классе W_α^m (m раз дифференцируемых 2π -периодических функций, m -я производная которых удовлетворяет условию Липшица порядка α), имеет явление Гиббса, если $m + \alpha > 2$, $0 \leq \alpha < 1$.

В заключение выражаем глубокую благодарность П. П. Коровкину за постановку задачи, а также П. Л. Ульянову за обсуждение полученных результатов.

Московский автомобильно-дорожный институт

Поступило
10 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ O. Szasz, Trans. Am. Math. Soc., v. 69, № 3, 440 (1950). ² С. А. Агаханов, Г. И. Натансон, ДАН, т. 162, № 6, 1215 (1965). ³ В. А. Болгов, Тр. Центрального зонального объединения математических кафедр, в. 2, Калинин, 1971, стр. 48. ⁴ J. Mann, Trans. Am. Math. Soc., v. 121, № 2, 277 (1966). ⁵ Г. И. Натансон, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, М., 1961, стр. 206. ⁶ П. П. Коровкин, ДАН, т. 114, № 6, 1158 (1957). ⁷ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965.