

УДК 531.7.08

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. КРАСОВСКИЙ

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИБОРОВ С БОЛЬШИМ ВРЕМЕНЕМ РЕЛАКСАЦИИ

Рассматриваются приборы, движение подвижных систем которых описывается дифференциальным уравнением вида

$$m\ddot{q} + r\dot{q} + cq = by + \xi, \quad (1)$$

где q — вектор-столбец выходных величин, y — вектор-столбец измеряемых величин, ξ — вектор-столбец тепловых шумов, m, c — симметричные матрицы масс и жесткостей соответственно, r, b — квадратные матрицы.

Матрица $r+r^T$ («т» означает транспонирование) характеризует интенсивность рассеяния энергии в приборе. Чем меньше элементы этой матрицы, тем больше время релаксации. Согласно обобщенной формуле Найквиста (без квантового множителя), матрица спектральных плотностей вектора тепловых шумов

$$S = kT(r+r^T),$$

где T — абсолютная температура.

Заметим, что в уравнении (1) из всех видов шумов и помех учтены только тепловые флуктуационные воздействия. Порог чувствительности, обусловленный этими воздействиями, естественно считать предельным. Ковариационные матрицы векторов $q, \dot{q}$ при нулевом или детерминированном воздействии y обозначим следующим образом:

$$M_{qq} = M[qq^T], \quad M_{q\dot{q}} = M[q\dot{q}^T],$$

$$M_{\dot{q}q} = M[\dot{q}q^T] = M_{q\dot{q}}^T, \quad M_{\dot{q}\dot{q}} = M[\dot{q}\dot{q}^T];$$

здесь M — символ математического ожидания.

Эти ковариационные матрицы удовлетворяют уравнениям (1)

$$\begin{aligned} m\dot{M}_{qq} + rM_{qq} + mM_{qq}r^T + cM_{qq} + mM_{qq}^T c &= kT(r+r^T), \\ \dot{M}_{q\dot{q}} + M_{q\dot{q}}r^T + M_{q\dot{q}}c - M_{q\dot{q}} &= 0, \\ \dot{M}_{\dot{q}q} &= M_{q\dot{q}} + M_{q\dot{q}}^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Если решение матричного дифференциального уравнения

$$m\ddot{w} + r\dot{w} + cw = 0, \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w_{(1)}(0) = e, \quad \dot{w}_{(1)}(0) = 0$$

(e — единичная матрица), обозначить $w_{(1)}(t)$, а решение того же уравнения при начальных условиях

$$w_{(2)}(0) = 0, \quad \dot{w}_{(2)}(0) = e$$

обозначать $w_{(2)}(t)$, то общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$q = w_{(1)}(t) q_0 + w_{(2)}(t) \dot{q}_0 - \int_0^t w_{(2)}(t-\tau) m^{-1} \xi(\tau) d\tau + \int_0^t w_{(2)}(t-\tau) m^{-1} b y(\tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\dot{q} = \dot{w}_{(1)}(t) q_0 + \dot{w}_{(2)}(t) \dot{q}_0 - \int_0^t \dot{w}_{(2)}(t-\tau) m^{-1} \xi(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{w}_{(2)}(t-\tau) m^{-1} b y(\tau) d\tau,$$

где $q_0 = q(0)$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(0)$ — начальные значения, матрица m считается неособой. Величины q_0 , $\dot{q}_0$ всегда случайны и их уровень зависит от способа подготовки прибора к измерению или способа разарретирования подвижной системы. Первые три члена в правых частях выражений (4) следует рассматривать как помехи, а последний член — как полезный сигнал.

При независимых центрированных q_0 , $\dot{q}_0$ ковариационные матрицы помех выражаются на основе (4) формулами

$$M_{qq} = w_{(1)}(t) M_{qq}(0) w_{(1)}^T(t) + w_{(2)}(t) M_{\dot{q}\dot{q}}(0) w_{(2)}^T(t) + kT \int_0^t w_{(2)}(\tau) m^{-1} (r + r^T) m^{-1} w_{(2)}(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$$M_{\dot{q}\dot{q}} = \dot{w}_{(1)}(t) M_{qq}(0) \dot{w}_{(1)}^T(t) + \dot{w}_{(2)}(t) M_{\dot{q}\dot{q}}(0) \dot{w}_{(2)}^T(t) + kT \int_0^t \dot{w}_{(2)}(\tau) m^{-1} (r + r^T) m^{-1} \dot{w}_{(2)}(\tau) d\tau.$$

Это решение уравнений (2) при $M_{q\dot{q}}(0) = M_{\dot{q}q}(0) = 0$. Обычно порог чувствительности определяется в установившемся (в статистическом смысле) режиме, когда $t \rightarrow \infty$. Для установившегося режима при неособых матрицах m , c из (2) или (5) получается известное решение (1)

$$M_{qq} = kT c^{-1}, \quad M_{\dot{q}\dot{q}} = kT m^{-1}, \quad M_{q\dot{q}} = M_{\dot{q}q} = 0, \quad (6)$$

которое, как легко проверить, соответствует распределению Гиббса для координат и скоростей подвижной системы. Установившийся режим, согласно (6), предоставляет сравнительно мало возможностей для снижения теплового флуктуационного порога чувствительности. Действительно, кроме уменьшения абсолютной температуры T (что связано с известными трудностями), можно изменять m , c . Последнее обычно ведет к возрастанию других, не учтенных в (1), мешающих воздействий. Так, увеличение масс (элементы матрицы m) уменьшает дисперсии скоростей $\dot{q}$, но увеличивает габариты подвижных систем и в ряде случаев ведет к возрастанию целого ряда мешающих влияний. Увеличение жесткостей снижает чувствительность к полезному сигналу (уменьшает элементы матрицы b).

Несколько иное положение имеет место в переходном режиме, который для приборов с большим временем релаксации может длиться очень долго. Действительно, если система невырожденная ($c \neq 0$) и время релаксации велико, то норма матрицы $r + r^T$ мала и собственные числа матрицы $m\lambda^2 + r\lambda + c$ почти мнимые, т. е. имеют малые действительные части. В этом случае $w_{(2)}(t)$ — сумма почти синусоидальных (со слабым затуханием) функций. Из формул (5) видно, что вызванные тепловыми шумами дисперсии в этом случае нарастают медленно, достигая установившегося значения лишь по истечении времени релаксации. Физическая причина заключается в том, что при малой диссипации подвижная система под

действием относительно редких ударов молекул раскачивается лишь постепенно, набирая энергию $1/2 kT$ (в среднем на степень свободы) только по истечении времени релаксации.

Относительно членов, обусловленных начальными возмущениями, можно привести следующие соображения. В принципе возможно устранить дополнительные возмущения при разарретировании подвижной системы, тогда $M_{qq}(0)$, $M_{\dot{q}\dot{q}}(0)$ соответствуют уровням тепловых флуктуационных колебаний в заарретированном или «выставленном» состоянии. Если арретирование осуществляется путем создания экстремума потенциальной энергии, или наложения дополнительных упругих связей (с достаточно высокими коэффициентами жесткости), то

$$M_{qq}(0) = kTc_0^{-1},$$

где c_0 — матрица жесткостей или коэффициентов потенциальной энергии в заарретированном состоянии. Соответствующим выбором c_0 по формуле $M_{qq}(0)$ можно сделать достаточно малой. Труднее влиять на

$$M_{\dot{q}\dot{q}}(0) = kTm^{-1},$$

так как для этого пришлось бы изменять массы подвижной системы в заарретированном состоянии. Однако в этом нет необходимости, если регистрация результатов измерения производится в тот момент времени, когда $\omega_{(2)} = 0$ (при почти периодической функции $\omega_{(2)}(t)$ такие моменты существуют).

Эти соображения показывают, что в переходных режимах измерения могут быть получены повышенные предельные чувствительности. Об этом также свидетельствуют следующие конкретные варианты. Гироскопы с электростатическими, сверхпроводящими, магнитными подвесами, использующие высокий вакуум, обладают большими временами релаксации, измеряемыми иногда годами ⁽²⁾. Уравнение движения сферических роторов таких гироскопов, записанное в форме (1), имеет вид

$$m\ddot{q} + r\dot{q} = \xi,$$

где

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad m = J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_r & H \\ -H & r_r \end{pmatrix},$$

q_1, q_2 — углы поворота относительно ортогональных экваториальных осей, J — экваториальный момент инерции ротора, H — кинетический момент, r_r — коэффициент вязкого трения. Время релаксации здесь имеет порядок $J/r_r = T_p$.

Производя вычисления по формулам (5) или решая уравнения (2), для данного случая находим

$$\begin{aligned} M_{q_1 q_1}(t) = & M_{q_1 q_1}(0) + dM_{\dot{q}_1 \dot{q}_1}(0) [1 - 2 \exp(-t/T_p) \cos(f\Omega t) + \\ & + \exp(-2t/T_p)] + \frac{2kT}{JT_p} \left\{ t - 2f\Omega d \exp(-t/T_p) \sin(f\Omega t) + \right. \\ & \left. + \frac{2d}{T_p} [\exp(-t/T_p) \cos(f\Omega t) - 1] + 1/2 T_p [1 - \exp(-2t/T_p)] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $f\Omega = H/J$ — частота путации (Ω — скорость вращения ротора), $d = 1/(f^2\Omega^2 + 1/T_p^2)$. Обычно d имеет порядок $10^{-7} - 10^{-6}$ сек².

Из формулы (7) следует, что броуновский дрейф гироскопов с большим временем релаксации пренебрежимо мал.

Обратимся теперь к вопросу измерения второй производной гравитационного потенциала градиентометром. Уравнение движения крутильной системы градиентометра может быть представлено в виде (1), где, однако,

все величины скалярные. В данном случае $m=b$ — момент инерции относительно оси подвеса, y — соответствующая пространственная производная гравитационного ускорения («градиент»). Используя формулы (5) или интегрируя уравнения (2), для данного случая находим

$$M_{qq}(t) = \frac{M_{qq}(0)}{2\kappa\omega_1^2 T_p^2} \exp(-2t/T_p) [1 - \cos(2\omega_1 t + 2\varphi)] + \\ + \frac{M_{\ddot{q}q}(0)}{2\omega_1^2} \exp(-2t/T_p) [1 - \cos(2\omega_1 t)] + \\ + \frac{kT}{m\omega_1^2} \{1 - \kappa - \exp(-2t/T_p) [1 + \kappa\omega_1 T_p \sin(2\omega_1 t) - \kappa \cos(2\omega_1 t)]\};$$

здесь

$$\omega_1^2 = \frac{c}{m} - \frac{1}{T_p^2}, \quad T_p = \frac{2m}{r}, \quad \kappa = \frac{1}{1 + \omega_1^2 T_p^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \omega_1 T_p.$$

Полезный сигнал при $y = \text{const}$ выражается так:

$$q_y = y T_p \kappa \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_p}\right) \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 T_p} \right] \right\}.$$

Анализ этих выражений показывает, что время регистрации сигнала целесообразно задавать равным полупериоду колебаний $t = \pi/\omega_1$. Тогда при $\omega_1 T_p \gg 2\pi$

$$M_{qq}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right) = M_{qq}(0) + \frac{kT}{c} \frac{2\pi}{\omega_1 T_p}, \quad q_y = \frac{2y}{\omega_1^2}.$$

Величину $M_{qq}(0) = kT/c_0$ можно сделать малой за счет высокой жесткости c_0 в заарретированном состоянии. Отсюда следует, что при большом времени релаксации предельный порог чувствительности градиентометра в переходном режиме намного ниже установившегося предельного порога.

Поступило
12 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Красовский, Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем, «Наука», 1974. ² П. И. Малеев, Новые типы гироскопов, «Судостроение», 1971.