

Б. М. ГУРЕВИЧ, Ю. М. СУХОВ

# СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ БОГОЛЮБОВА В КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 I 1975)

1. Согласно принятой в статистической механике точке зрения, эволюция состояния системы взаимодействующих движущихся частиц описывается с помощью так называемой цепочки уравнений Н. Н. Боголюбова ( $B-B-G-K-Y$  hierarchy), см. <sup>(1-3)</sup>. В настоящее время вопрос о существовании и единственности решений этой системы уравнений остается открытым (некоторые относящиеся сюда результаты содержатся в <sup>(4-7)</sup>). Данная работа посвящена задаче описания стационарных решений цепочки уравнений Боголюбова. Этот вопрос представляет интерес в связи с обоснованием статистической механики (проблема необратимости, сходимость к равновесным состояниям). Наш основной результат состоит в том, что для систем частиц с типичным характером взаимодействия множество стационарных решений цепочки уравнений Боголюбова в естественном классе распределений сводится к равновесным распределениям Гиббса.

2. Распределения вероятностей на фазовом пространстве и корреляционные функции. Фазовое пространство  $M=M(R^v)$  системы частиц в  $R^v$  определяется как совокупность конечных или счетных множеств  $X=\{x\}$ , где  $x=(q, v)$ ,  $q \in R^v$ ,  $v \in R^v$  — координата и скорость отдельной частицы, причем пересечение множества  $\{q: (q, v) \in X\}$  с любым компактом  $K \subset R^v$  конечно. В  $M$  выделим подмножество  $M^0=M^0(R^v)$ , состоящее из конечных наборов  $\bar{x}=\{x\}$ , которое, очевидно, представляется в виде  $\bigcup_{n \geq 0} M_n$ , где  $M_n=M_n(R^v)$  — фазовое пространство системы  $n$  частиц в  $R^v$ ,  $M_0=\{\emptyset\}$ . Аналогично можно ввести пространство  $M^0(\Omega) \subset M^0$  для произвольного борелевского множества  $\Omega \subset R^v$ . На  $M^0$  введем меру  $\lambda$ , положив  $d\lambda(\bar{x}) = (n(\bar{x})!)^{-1} \prod_{x \in \bar{x}} dx$ , где  $n(\bar{x})$  — число частиц, и  $dx=dq dv$  (по определению  $\lambda(M_0)=1$ ).

Состоянием системы частиц в  $R^v$  мы называем распределение вероятностей на пространстве  $M$  (точнее, на естественной  $\sigma$ -алгебре в  $M$ , порожденной цилиндрическими подмножествами, ср. <sup>(8)</sup>), или, в другой терминологии, точечное случайное поле в  $R^v$ , маркированное векторами из  $R^v$ . Состояние  $P$  можно задавать с помощью корреляционной функции  $\rho_P(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in M^0$ , определяемой следующим образом (ср. <sup>(8, 9)</sup>). Пусть  $A$  — произвольное ограниченное измеримое множество в пространстве  $M_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $X_A(\bar{x})$  — его индикаторная функция. Корреляционная функция  $\rho_P(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in M_n$ , определяется равенством \*

$$\int_A \rho_P(\bar{x}) d\lambda(\bar{x}) = \int \sum_{M: \bar{y} \subset X, \bar{y} \in M_n} X_A(\bar{y}) dP(X).$$

\* Функцию  $\rho_P(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in M_n$ , в физической литературе часто называют  $n$ -частичной функцией распределения. Введенное здесь понятие корреляционной функции по существу совпадает с известным в теории случайных потоков понятием функции  $k$ -интенсивностей потока, см. <sup>(10)</sup>.

Нетрудно показать, что корреляционная функция (если она существует) однозначно определяет состояние. Условия на состояние  $P$ , формулируемые ниже, гарантируют существование корреляционной функции  $\rho_P(\bar{x})$  и ее гладкую зависимость от переменных  $(q, v) \in \bar{x}$ .

2. Уравнения Боголюбова. Будем говорить, что корреляционная функция  $\rho_P(\bar{x})$  является стационарным решением цепочки уравнений Боголюбова, если выполняется соотношение (ср. <sup>(1-6)</sup>)

$$\{\rho_P(\bar{x}), H(\bar{x})\} + \int \{\rho_P(\bar{x} \cup (q, v)), U(q|\bar{x})\} dq dv = 0; \quad (1)$$

здесь

$$H(\bar{x}) = \frac{1}{2} \sum_{(q', v') \in \bar{x}} \left[ v'^2 + \sum_{\substack{(q'', v'') \in \bar{x} \\ q'' = q'}} U(|q' - q''|) \right],$$

$H(\bar{x})$  — гамильтониан системы частиц с координатами  $\{q': (q', v') \in \bar{x}\}$  и скоростями  $\{v': (q', v') \in \bar{x}\}$ ;

$$U(q|\bar{x}) = \sum_{(q', v') \in \bar{x}} U(|q - q'|),$$

$U$  — потенциальная энергия взаимодействия частицы с координатой  $q$  и системы частиц с координатами  $\{q': (q', v') \in \bar{x}\}$ ;  $\{ \}$  — скобка Пуассона. Мы предполагаем, что парный потенциал  $U(r)$ ,  $r \geq 0$ , ограничен снизу и принадлежит классу  $C^3$  на интервале  $(d_0, \infty)$ ,  $d_0 \geq 0$ ;  $U(r) = 0$  при  $r \geq d_1$ , где  $d_1 > d_0$  (условие локальности);  $U(r) \rightarrow +\infty$  и для любого  $c > 0$  производная  $\frac{d}{dr} \exp[-cU(r)] \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow d_0+$ ; наконец,  $U(r) = +\infty$  при  $0 \leq r \leq d_0$ . В соот-

ветствии с этим интегрирование в (1) распространяется на множество  $D(d_0, \bar{x}) = \{(q, v) \in R^v \times R^v: \min[|q - q'|, (q', v') \in \bar{x}] > d_0\}$ .

3. Гиббсовские случайные поля. Пусть  $f = f(\bar{x})$  — измеримая вещественная функция на  $M^0$ , принимающая, возможно, значение  $+\infty$ , такая, что  $f(\phi) = 0$  и если  $f(\bar{x}) = +\infty$ ,  $\bar{x} \subset \bar{y}$ , то  $f(\bar{y}) = +\infty$ . Распределение вероятностей  $P$  на  $M$  будем называть гиббсовским случайным полем (в смысле Р. Л. Добрушина) с порождающей функцией  $f$  (ср. <sup>(11)</sup>), если для любого ограниченного борелевского множества  $\Omega \subset R^v$ :

а) при почти всех (относительно  $P$ )  $X \in M$  существует предел  $h(X_\Omega | X_{\Omega^c}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow X} h(\bar{x}_\Omega | \bar{x}_{\Omega^c})$ , где

$$X_\Omega = \{x = (q, v) \in X: q \in \Omega\}, \quad X_{\Omega^c} = \{x = (q, v) \in X: q \notin \Omega\},$$

$\bar{x}_\Omega$  и  $\bar{x}_{\Omega^c}$  определяются аналогично,  $\bar{x} \rightarrow X$  обозначает направленное множество конечных подмножеств  $\bar{x} \subset X$  и  $h(\bar{x}_\Omega | \bar{x}_{\Omega^c}) = \sum_{\bar{y} \subset \bar{x}, \bar{y} \cap X_\Omega \neq \emptyset} f(\bar{y})$ ;

б) условное распределение  $P(\cdot | X_{\Omega^c})$  при условии, что фиксированы координаты и скорости частиц вне  $\Omega$ , рассматриваемое как вероятностная мера на  $M^0(\Omega)$ , обладает плотностью  $p(\bar{x}; \Omega | \cdot)$  относительно меры  $\lambda$ , представимой почти всюду в виде

$$p(\bar{x}; \Omega | X_{\Omega^c}) = \frac{\exp\{-h(X_\Omega | X_{\Omega^c})\}}{\Xi_\Omega(X_{\Omega^c})}, \quad \bar{x} \in M^0, \quad X \in M, \quad X_\Omega = \bar{x},$$

где  $\Xi_\Omega(X_{\Omega^c})$  — нормирующий множитель, не зависящий от  $\bar{x}$ .

Как показано в <sup>(11)</sup>, существуют весьма общие условия на распределение вероятностей, при выполнении которых оно оказывается гиббсовским случайным полем. Удобство гиббсовских полей для изучения ряда вопросов статистической физики вытекает из того, что представление случайного поля в гиббсовском виде позволяет описывать его свойства в терминах порождающей функции, значения которой играют роль независимых параметров.

В целях простоты дальнейшего изложения мы ограничимся гиббсовскими случайными полями, порождаемые функции которых удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

1) условие твердой сердцевины: найдется такое  $d_0' \geq 0$ , что множество  $\{\bar{x} \in M^0: f(\bar{x}) < \infty\}$  совпадает с  $D(d_0') = \{\bar{x} \in M^0: \min_{\substack{(q,v), (q',v') \in \bar{x} \\ q' \neq q}} |q - q'| > d_0'\}$

(всюду в дальнейшем мы полагаем  $d_0' = d_0$  (см. п. 2));

2) условие локальности: найдется такое  $d_1' \geq d_0$ , что  $f(\bar{x}) = 0$ , если  $\max_{(q,v), (q',v') \in \bar{x}} |q - q'| > d_1'$ ;

3) условие финитности: найдется такое  $n_0$ , что  $f(\bar{x}) = 0$ , если  $n(\bar{x}) \geq n_0$ ;

4) условие  $C^2$ -гладкости: при любом  $n > 0$  ограничение функции  $f(\bar{x})$  на  $M_n \cap D(d_0)$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией координат и скоростей всех частиц;

5) функция  $F(\bar{x}) = \exp[-f(\bar{x})]$  вместе со своими производными по  $q$  и  $v$ ,  $(q, v) \in \bar{x}$ , ограничена на  $D(d_0)$  и стремится к нулю, когда  $\min[|q - q'|: (q, v) \in \bar{x}, (q', v') \in \bar{x}, q \neq q'] \rightarrow 0$ , либо  $\max[|v|: (q, v) \in \bar{x}] \rightarrow +\infty$ ; функция

$$\{F(\bar{x}), H(\bar{x})\}^+ = \sum_{(q,v) \in \bar{x}} (|\nabla_q F(\bar{x})| |\nabla_v H(\bar{x})| + |\nabla_v F(\bar{x})| |\nabla_q H(\bar{x})|)$$

интегрируема на  $M(\Omega)$  по мере  $\lambda$  для любого ограниченного  $\Omega \subset \mathbb{R}^v$ .

Всякое гиббсовское случайное поле, порождающая функция которого имеет вид  $(c_1 \geq 0, c_2 \in \mathbb{R}^v, c_3 \in \mathbb{R}^1)$

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2} c_1 v^2 + c_2 v_2 + c_3, & \text{если } n(\bar{x}) = 1, \bar{x} = \{(q, v)\}, \\ c_1 u(|q_1 - q_2|), & \text{если } n(\bar{x}) = 2, \bar{x} = \{(q_1, v_1), (q_2, v_2)\}, \\ 0, & \text{если } n(\bar{x}) > 2, \min_{\substack{(q,v), (q',v') \in \bar{x} \\ q \neq q'}} |q - q'| > d_0, \end{cases} \quad (2)$$

называется равновесным распределением Гиббса. Легко проверить, что корреляционная функция равновесного распределения Гиббса  $P$  удовлетворяет (1), если и только если  $P$  инвариантно относительно пространственных сдвигов в направлении вектора  $c_2$ .

4. Основная теорема. Пусть гамильтониан  $H(\bar{x})$  соответствует потенциалу взаимодействия  $u(r)$ , удовлетворяющему условиям п. 3. Пусть, далее, корреляционная функция  $\rho_r(\bar{x})$  гиббсовского случайного поля  $P$  с порождающей функцией  $f$ , для которой выполнены условия 1) — 5) из п. 3, является стационарным решением цепочки уравнений Боголюбова.

Тогда  $f$  имеет вид (2), т. е.  $P$  — равновесное распределение Гиббса.

Доказательство основной теоремы проводится в два этапа. Вначале доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. При выполнении условий основной теоремы порождающая функция  $f$  удовлетворяет уравнению

$$\{f(\bar{x}), H(\bar{x})\} + \sum_{(q,v) \in \bar{x}} \{f(\bar{x} \setminus (q, v)), u(q|\bar{x} \setminus (q, v))\} = 0, \bar{x} \in D(d_0). \quad (3)$$

Уравнение (3) естественно интерпретировать как сопряженное к уравнению (1) (или, рассматривая отдельно ограничения  $f$  на каждое  $M_n$ , как систему уравнений, сопряженную к цепочке уравнений Боголюбова в стационарном случае).

Второй этап доказательства основной теоремы составляет

Теорема 2. Пусть для потенциала  $U(r)$  выполнены условия п. 3.

Тогда всякая функция  $f(\bar{x})$ , удовлетворяющая условиям 1) — 5) и уравнению (3), имеет вид (2).

5. Замечания. 1) Уравнение (3) представляется более удобным объектом для изучения, чем исходное уравнение (1), в частности, по сле-

дующей причине: если рассматривать (3) как систему уравнений, связывающих ограничения  $f$  на различные  $M_n$ , то уравнения в этой системе оказываются зацепленными спизу, что в принципе облегчает их исследование.

2) Не все из перечисленных в п. 3 условий на порождающую функцию  $f$  и потенциал взаимодействия  $U$  одинаково существенны для доказательства теорем 1 и 2. Теорема 1 останется справедлива, если значительно ослабить условия локальности и финитности, наложенные на  $f$ , а также условия  $C^2$ -гладкости и локальности потенциала  $U$ . При доказательстве теоремы 2 условие 2) также несущественно; вместо этого достаточно лишь потребовать, чтобы выполнялось условие

$$f(\bar{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \max_{(q, v), (q', v') \in \bar{x}} |q - q'| \rightarrow \infty.$$

Что же касается условия финитности  $f$ , то оно существенно используется при доказательстве теоремы 2.

Отказ от условия  $U(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow a_0^-$  приводит к необходимости введения дополнительных граничных членов в уравнение (1), после чего схема доказательства основной теоремы остается прежней. Здесь необходимо лишь исключить тривиальный потенциал  $U(r) \equiv 0, r > d_0$ , отвечающий газу «твердых сфер».

3) Гипотеза о возможности вывода уравнения (3) из уравнения (1) была впервые высказана Я. Г. Синаем в ходе доклада Г. А. Мартынова на семинаре в Московском университете. Первоначально авторы располагали выводом уравнения (3) из условия инвариантности гиббсовского случайного поля  $P$  относительно кластерной динамики, построенной в <sup>(7)</sup>. Подход, изложенный в данной работе, является по существу более общим. Поэтому сформулированные здесь результаты можно в известном смысле рассматривать как обобщение на многомерный случай результатов работы <sup>(12)</sup>. Мы предполагаем более подробно остановиться на этом вопросе в другом месте.

В заключение выражаем благодарность Я. Г. Синаю за постоянное внимание и поддержку, а также Г. А. Мартынову и В. И. Оселедцу за ряд полезных обсуждений.

Институт проблем передачи информации  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
8 I 1975

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, М., 1946. <sup>2</sup> Дж. Уленбек, Дж. Форд, Лекции по статистической механике, М., «Мир», 1965. <sup>3</sup> Дж. Уленбек, в кн. М. Кац, Вероятность и смежные вопросы в физике, М., «Мир», 1965. <sup>4</sup> G. Gallavotti, O. E. Lanford, J. L. Lebowitz, J. Math. Phys., v. 11, № 4 (1970). <sup>5</sup> D. Ja. Petrina, O. K. Vidybida, Preprint ITF, 73-58E, 1973. <sup>6</sup> Я. Г. Синай, Ю. М. Сухов, Теоретич. и матем. физика, т. 19, № 3 (1974). <sup>7</sup> Я. Г. Синай, Вестн. МГУ, сер. матем. и мех., № 1 (1974). <sup>8</sup> Д. Рюэль, Статистическая механика, М., «Мир», 1971. <sup>9</sup> Р. А. Минлос, УМН, т. 23, в. 1 (1968). <sup>10</sup> Ю. Р. Беляев, в кн.: Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, М., «Мир», 1969. <sup>11</sup> О. П. Козлов, УМН, т. 30, в. 5 (1975). <sup>12</sup> Б. М. Гуревич, Я. Г. Синай, Ю. М. Сухов, УМН, т. 28, в. 5 (1973).