

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

С. Я. ЛЬВИН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 II 1975)

В статье ⁽¹⁾ доказывается коэрцитивная априорная оценка решения общей граничной задачи для оператора L_1 , являющегося произведением вырождающихся эллиптических операторов второго порядка, изученных в ⁽²⁾, и строится регуляризатор для этой задачи. В настоящей работе получены аналогичные результаты для оператора L , являющегося произведением квазиоднородного эллиптического оператора L_0 и вырождающегося эллиптического оператора L_1 .

Пусть $\alpha(t) \in C^p[0, d]$, $p \geq 1$, $\alpha(t) > 0$ при $0 < t \leq d$ и $\alpha(0) = 0$. В полосе $R_{n+1}^d = \{(t, x): 0 < t < d, x \in R_n\}$ рассмотрим дифференциальный оператор $L(\alpha(t)\partial_t, \partial_t, -i\partial_x)$, символ которого $L(\eta, \lambda, \xi)$, полученный заменой производных $\partial_t, -i\partial_x$ и производной с весом $\alpha(t)\partial_t$ на двойственные переменные λ, ξ_i и η соответственно, можно представить в виде

$$L(\eta, \lambda, \xi) = L_0(\lambda, \xi)L_1(\eta, \lambda, \xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Условие 1 (квазиоднородной эллиптичности символа L_0). Квазиоднородная функция $L_0(\lambda, \xi)$ порядка k ($L_0(c^2\lambda, c\xi) = c^k L_0(\lambda, \xi)$, $k \geq 0$ — четное число) является многочленом по λ степени $1/2k$, причем λ -корни $L_0(\lambda, \xi)$ не лежат на мнимой оси для любых $\xi \in R_n$, $|\xi| \neq 0$ и $1/2k - (1/2k^+)$ — число корней, лежащих в левой (правой) полуплоскости, не зависит от ξ .

Условие 2. Символ $L_1(\eta, \lambda, \xi)$ есть произведение $1/2l$ ($l \geq 2$ — четное число) α -эллиптических символов второго порядка (см. ⁽²⁾), т. е.

$$L_1(\eta, \lambda, \xi) = \prod_{q=1}^{1/2l} \mathcal{L}_q(\eta, \lambda, \xi),$$

$$\mathcal{L}_q(\eta, \lambda, \xi) = \eta^2 + b_q \lambda + \sum_{i=1}^n \omega_{qi} \xi_i \eta - \sum_{i,j=1}^n c_{qij} \xi_i \xi_j,$$

где $b_q \neq 0$ — действительные константы, а

$$\operatorname{Re} \left[|\eta|^2 + \sum_{i=1}^n \omega_{qi} \bar{\xi}_i \eta + \sum_{i,j=1}^n c_{qij} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_j \right] \geq v_0 [|\eta|^2 + |\xi|^2]$$

для любых комплексных η и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$; $q = 1, 2, \dots, 1/2l$.

Обозначим через $1/2l^-$ ($1/2l^+$) число символов $\mathcal{L}_q$, у которых коэффициент b_q отрицателен (положителен).

Операторы ∂_t и $\alpha(t)\partial_t$, в отличие от их символов λ и η , не коммутируют. В связи с этим операторы $L(\alpha(t)\partial_t, \partial_t, -i\partial_x)$ и $L'(\alpha(t)\partial_t, \partial_t, -i\partial_x)$, различающиеся порядком применения производной ∂_t и производной с весом $\alpha(t)\partial_t$ (и только они), обладают одинаковыми символами $L(\eta, \lambda, \xi) = L'(\eta, \lambda, \xi)$. В работе мы не уточняем вид оператора $L(\alpha(t)\partial_t, \partial_t, -i\partial_x)$, ограничиваясь лишь заданием его символа, так как при условии доста-

точной гладкости функции $\alpha(t)$ операторы L и L' с одинаковыми символами различаются слагаемыми, не нарушающими, в силу следствия 1 (см. ниже), справедливости доказываемых теорем.

Легко видеть, что предельный символ $L(0, \lambda, \xi)$ также удовлетворяет условию 1 с порядком квазиоднородности $r=k+l$ и допускает квазиоднородную факторизацию, т. е. представим в виде

$$L(0, \lambda, \xi) = L^-(0, \lambda, \xi) L^+(0, \lambda, \xi),$$

где функции $L^-(0, \lambda, \xi)$ и $L^+(0, \lambda, \xi)$ квазиоднородны порядка $r^-=k^-+l^-$ и $r^+=k^++l^+$ соответственно. При каждом $\xi \in R_n$, $|\xi| \neq 0$ λ -корни $L^-(0, \lambda, \xi)$ ($L^+(0, \lambda, \xi)$) лежат в открытой левой (правой) полуплоскости.

Рассмотрим граничные операторы

$$S_j(\partial_t, -i\partial_x) = \sum_{|\beta|+2\nu=m_j} S_{j\beta\nu} \partial_t^\nu (-i\partial_x)^\beta, \quad j=1, 2, \dots, 1/2 r^-,$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\beta_i \geq 0$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$, $\xi^\beta = \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} \dots \xi_n^{\beta_n}$. Предположим, что операторы S_j удовлетворяют следующему условию дополненности.

Условие 3. Для любых $\xi \in R_n$, $|\xi| \neq 0$ многочлены $S_j(\lambda, \xi)$ линейно независимы по модулю многочлена $L^-(0, \lambda, \xi)$.

Введем в рассмотрение пространство $H_{s,m}(R_{n+1}^d)$ ($s \geq m \geq 0$ — целые числа) обобщенных функций $v(t, x)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,m} = \left\{ \sum_{\substack{p+\mu+2\nu=s \\ \mu \leq m}} \int_{R_n} (1+|\xi|^2)^p \int_0^d |\alpha^\mu(t) \partial_t^{\mu+\nu} (F_n v)(t, \xi)|^2 dt d\xi \right\}^{1/2},$$

где F_n — преобразование Фурье по переменным $x \in R_n$.

Рассмотрим также пространство С. Л. Соболева $H_s(R_n)$ функций $G(x)$, определенных на гиперплоскости $t=0$, для которых конечна норма

$$\langle\langle G \rangle\rangle_s = \left\{ \int_{R_n} (1+|\xi|^2)^s |(F_n G)(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2}.$$

Отметим, что для любой функции $v(t, x) \in H_{s,m}(R_{n+1}^d)$ справедливы неравенства с постоянной $c > 0$, не зависящей от v :

$$\|v\|_{s-2,m} \leq c \|v\|_{s,m-1}, \quad s-2 \geq m \geq 1, \quad \rho \geq 1;$$

$$\|v\|_{s-1,m-1} \leq \varepsilon \|v\|_{s,m} + c(\varepsilon) \|v\|_{0,0}, \quad s \geq m \geq 0, \quad m - \text{четное число},$$

$$\varepsilon > 0 - \text{любое}, \quad \rho \geq m-1;$$

$$\langle\langle \gamma v \rangle\rangle_{s-1} \leq c \|v\|_{s,m}, \quad s \geq 2, \quad s \geq m \geq 0,$$

где γ — оператор перехода к пределу при $t \rightarrow +0$.

Предположим, что $s-r \geq m-l \geq 0$, $s \geq \max\{m_j+2\}$, $\rho \geq [1/2(s+m)]-1$. Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{A}$, действующий из $H_{s,m}(R_{n+1}^d)$ в

$$\mathcal{H}_{s,m} = H_{s-r,m-l}(R_{n+1}^d) \prod_{j=1}^{1/2 r^-} H_{s-m_j-1}(R_n):$$

$$\mathcal{A}v = \{Lv, \gamma S_1 v, \gamma S_2 v, \dots, \gamma S_{1/2 r^-} v\}, \quad v \in H_{s,m}(R_{n+1}^d).$$

Через $C_{0,\delta}^\infty$, $0 < \delta < d$, обозначим множество бесконечно дифференцируемых в R_{n+1} функций $\varphi(t, x)$, равных нулю при $t^2 + x^2 \geq \delta^2$.

Теорема 1. Пусть $\alpha(t) \in C^0[0, d]$, $\alpha(t) > 0$ при $0 < t \leq d$, $\alpha(0) = 0$; оператор $L(\alpha(t) \partial_t, \partial_t, -i\partial_x)$ с символом $L(\eta, \lambda, \xi) = L_0(\eta, \xi) L_1(\eta, \lambda, \xi)$ и опера-

торы $S_j(\partial_i, -i\partial_x)$, $j=1, 2, \dots, 1/2r^-$, удовлетворяют условиям 1-3; $s-r \geq m-l \geq 0$, $s \geq \max\{m_j+2\}$, $\rho \geq [1/2(s+m)]-1$, $0 < \delta < d$.

Тогда для любых $v(t, x) \in H_{s, m}(R_{n+1}^d)$ и $\varphi(t, x) \in C_{0, \delta}^\infty$ справедливо неравенство

$$\|\varphi v\|_{s, m} \leq c(\|\mathfrak{A}\varphi v\|_{\mathcal{H}_{s, m}^0} + \|\varphi v\|_{s, 0})$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от v и φ .

Теорема 2. В условиях теоремы 1 существует ограниченный оператор R , действующий из $\mathcal{H}_{s, m}$ в $H_{s, m}(R_{n+1}^d)$, являющийся правым регуляризатором для оператора $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}R = I + T$, где T — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_{s, m}$ в $\mathcal{H}_{s+1, m+1}$.

Следствие 1. Утверждения теорем 1 и 2 остаются справедливыми, если оператор $\mathfrak{A}$ заменить на $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$, где $\mathfrak{A}'$ — произвольный ограниченный оператор из $H_{s, m}(R_{n+1}^d)$ в $\mathcal{H}_{s+1, m+1}$ и из $H_{s-1, m-1}(R_{n+1}^d)$ в $\mathcal{H}_{s, m}$.

Доказательство сформулированных утверждений основывается на леммах о задачах с граничными условиями типа Дирихле на гиперплоскости $t=0$ для операторов L_0 и L_1 и о связи между операторами $\gamma L_1(\alpha(t)\partial_i, \partial_i, -i\partial_x)$ и $\gamma L_1(0, \partial_i, -i\partial_x)$.

Пусть $s-k \geq m \geq 0$, $k \geq 2$. Рассмотрим оператор $\mathfrak{A}_0$, действующий из

$$H_{s, m}(R_{n+1}^d) \text{ в } \mathcal{H}_{s, m}^0 = H_{s-k, m}(R_{n+1}^d) \prod_{j=1}^{1/2k-} H_{s-2j+1}(R_n):$$

$$\mathfrak{A}_0 v = \{L_0 v, \gamma v, \gamma \partial_i v, \dots, \gamma \partial_t^{1/2k-1} v\}, \quad v \in H_{s, m}(R_{n+1}^d).$$

Лемма 1. Пусть оператор L_0 удовлетворяет условию 1, $s-k \geq m \geq 0$, $\alpha(t)$, ρ и δ такие же, как в теореме 1.

Тогда для любых $v(t, x) \in H_{s, m}(R_{n+1}^d)$ и $\varphi(t, x) \in C_{0, \delta}^\infty$ справедливо неравенство

$$\|\varphi v\|_{s, m} \leq c(\|\mathfrak{A}_0 \varphi v\|_{\mathcal{H}_{s, m}^0} + \|\varphi v\|_{s-1, m'-1}),$$

где $m' = m$, если $m > 0$, $m' = 1$, если $m = 0$; существует ограниченный оператор R_0 , действующий из $\mathcal{H}_{s, m}^0$ в $H_{s, m}(R_{n+1}^d)$, являющийся правым регуляризатором для оператора $\mathfrak{A}_0$, т. е. $\mathfrak{A}_0 R_0 = I + T_0$, где T_0 — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_{s, m}^0$ в $\mathcal{H}_{s+1, m+1}^0$.

Заметим, что утверждение леммы 1 справедливо и для любого однородного эллиптического оператора L_0 , если пространство $H_{s, m}(R_{n+1}^d)$ заменить на пространство $W_{s, m}(R_{n+1}^d)$, полученное замыканием бесконечно дифференцируемых в R_{n+1} функций $v(t, x)$ по норме

$$\|v\|_{s, m} = \left\{ \sum_{\substack{p+q=s+\mu \\ \mu \leq m}} \int_{R_n} (1 + |\xi|^2)^p \int_0^d |\alpha^\mu(t) \partial_t^q (F_n v)(t, \xi)|^2 dt d\xi \right\}^{1/2},$$

а пространство $\mathcal{H}_{s, m}^0$ — заменить на пространство

$$\mathcal{W}_{s, m}^0 = W_{s-k, m}(R_{n+1}^d) \times \prod_{j=1}^k H_{s-j+1/2}(R_n).$$

Отсюда обычным образом можно получить вётеровость оператора, порожденного эллиптической задачей в ограниченной области в соответствующих пространствах $W_{s, m}$.

Пусть $s \geq m \geq l$. Рассмотрим оператор $\mathfrak{A}_1$, действующий из $H_{s-l, m-l}(R_{n+1}^d)$ в

$$\mathcal{H}'_{s,m} = H_{s-l, m-l}(R_{n+1}^d) \times \prod H_{s-2j+1}(R_n):$$

$$\mathfrak{A}_1 v = \{L_1 v, \gamma v, \gamma \partial_t v, \dots, \gamma \partial_t^{1/2 l - 1} v\}, \quad v \in H_{s,m}(R_{n+1}^d).$$

Л е м м а 2. Пусть оператор L_1 удовлетворяет условию 2, $s \geq m \geq l$, $\alpha(t)$, ρ и δ такие же, как в теореме 1.

Тогда для любых $v(t, x) \in H_{s,m}(R_{n+1}^d)$ и $\varphi(t, x) \in C_{0,\delta}^\infty$ справедливо неравенство

$$\|\varphi v\|_{s,m} \leq c(\|\mathfrak{A}_1 \varphi v\|_{\mathcal{H}'_{s,m}} + \|\varphi v\|_{s-l, m-l});$$

существует ограниченный оператор R_1 , действующий из $\mathcal{H}'_{s,m}$ в $H_{s,m}(R_{n+1}^d)$, являющийся правым регуляризатором для оператора $\mathfrak{A}_1$, т. е. $\mathfrak{A}_1 R_1 = I + T_1$, где T_1 — ограниченный оператор из $\mathcal{H}'_{s,m}$ в $\mathcal{H}'_{s+1, m+1}$.

Л е м м а 3. Пусть $s \geq 2j+l+2$, $s-l-2j \geq m-l \geq 0$, $\rho \geq [1/2(m+l+s)]-1$.

Тогда для любых $v(t, x) \in H_{s,m}(R_{n+1}^d)$

$$\gamma \partial_t^j L_1(\alpha(t) \partial_t, \partial_t, -i \partial_x) v - \gamma \partial_t^j L_1(0, \partial_t, -i \partial_x) v = \gamma Q_j v,$$

где Q_j — ограниченные операторы из $H_{s,m}(R_{n+1}^d)$ в $H_{s-l-2j+1, m-l+1}(R_{n+1}^d)$.

Утверждение леммы 1 для частного случая $m=0$ хорошо известно; утверждения лемм 2 и 3 для случая $s=m$ доказаны в (1).

Приношу искреннюю благодарность В. П. Глушко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
15 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. П. Глушко, М. Д. Баталин, Сб.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики (Матер. Ташкентск. конф.), Новосибирск, 1975. ² В. П. Глушко, Тр. Моск. матем. об-ва, т. 23, 113 (1970).