

А. Б. ЖИЖЧЕНКО

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЯХ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В СЛОЯХ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 17 I 1975)

Рассматривается неособое полное комплексное алгебраическое многообразие W^n размерности n и собственный регулярный морфизм $\varphi: W^n \rightarrow P^1$, где P^1 — комплексная проективная прямая. Пробообразы точек $t \in P^1$ назовем слоями: $F_t = \varphi^{-1}(t)$ — расслоения φ . Почти все слои расслоения φ будут неособыми неприводимыми полными алгебраическими многообразиями размерности $n-1$. Имеется лишь конечное число особых слоев, соответствующих точкам $t_1, \dots, t_s, t_i \in P^1$. Эти точки назовем сингулярными точками базы, а слои $F_i = \varphi^{-1}(t_i), i=1, \dots, s$, назовем сингулярными слоями расслоения φ . Слой $F_0 = \varphi^{-1}(t_0)$, соответствующий общей точке $t_0 \in P^1$, назовем общим слоем расслоения φ .

Изучим вопрос о связи групп когомологий (гомологий) многообразия W^n с соответствующими группами пространств $F_0, F_1, \dots, F_s$ при условии, что сингулярные слои неприводимы и имеют лишь изолированные особенности типа Фама, т. е. путем аналитической замены координат в шаре $B \subset W^n$ с центром в изолированной особенности слоя можно добиться того, чтобы локальное уравнение общего слоя было приведено к виду

$$\sum_{k=1}^n z_k^{a_k} = t_0,$$

уравнение особого слоя — к виду

$$\sum_{k=1}^n z_k^{a_k} = 0.$$

Здесь естественно возникает два рода задач: локальная и глобальная.

Локальная задача. Рассмотрим некоторую сингулярную точку базы $t_i \in P^1$ и окружность O_i малого радиуса $\rho_i: \{t \in P^1 \mid |t - t_i| = \rho_i\}$ с центром в точке t_i и такую, что внутри ее и на ней нет других сингулярных точек базы. Тогда, если в качестве точки t_0 взять общую точку окружности O_i , можно определить два морфизма групп гомологий

$$r_i^*: H_*(F_0) \rightarrow H_*(F_i),$$

$$\theta_i^*: H_*(F_0) \rightarrow H_*(F_0),$$

где морфизм r_i^* определяется ретракцией $r_i: F_0 \rightarrow F_i$ общего неособого слоя F_0 на сингулярный слой F_i , а автоморфизм θ_i^* определяется морфизмом $\theta_i: F_0 \rightarrow F_0$, получающимся при однократном обходе точки t_i по окружности O_i против часовой стрелки. Через $k\theta_i^*$ будем обозначать автоморфизм, соответствующий k -кратному обходу точки t_i по окружности O_i . Конструкция отображений r_i и θ_i содержится, например, в работе (1). При этом необходимо отметить, что в случае изолированных особенностей в сингулярных слоях эти отображения достаточно построить в шаре малого радиуса с центром в особой точке, так как вне этого шара соответствующие отображения будут изотопны тождественным.

Решением локальной задачи является полное описание морфизмов r_i^* и θ_i^* для $i=1, \dots, s$, т. е. вычисление ядер и образов, а также кообразов этих морфизмов.

Г л о б а л ь н а я з а д а ч а. Вычислить группы гомологий $H_*(W^n)$ через группы гомологий общего неособого слоя $H_*(F_0)$, а также локальные данные: ядра, образы и кообразы морфизмов r_i^* , θ_i^* , $i=1, \dots, s$; получить также глобальное разложение группы $H_*(F_0)$, связанное с локальными морфизмами r_i^* , θ_i^* .

1°. Рассмотрим описанный выше морфизм $r_i: F_0 \rightarrow F_i$. Поскольку сингулярные слои имеют лишь изолированные особенности, в слое F_i их конечное число, перенумеруем их $c_1^i, c_2^i, \dots, c_{r_i}^i$. Вокруг каждой точки c_k^i опишем шар $B_{i,k}$ радиуса σ , лежащий в W^n , где $\sigma < 1/2 \min \rho(c_s^i, c_t^i)$, где $s \neq t$, $s, t=1, \dots, r_i$. Будем предполагать, что радиус ρ_i описанной около точки t_i окружности O_i равен $\sigma/2$. Отображение r_i индуцирует отображения $r_{i,k}: B_{i,k} \cap F_0 \rightarrow B_{i,k} \cap F_i$, определяемые естественным образом (см., например, (1)).

Согласно основному предположению, можно выбрать локальные координаты $(z_{i,k}^1, \dots, z_{i,k}^n)$ в шаре $B_{i,k}$ таким образом, что уравнение $B_{i,k} \cap F_0$ будет иметь вид

$$\sum_{s=1}^n (z_{i,k}^s)^{a_s^{t,k}} = 1,$$

а уравнение $B_{i,k} \cap F_i$ будет иметь вид

$$\sum_{s=1}^n (z_{i,k}^s)^{a_s^{t,k}} = 0.$$

Как было выяснено в работе Ф. Фама (4), группы гомологий $H_*(B_{i,k} \cap F_0)$ имеют следующее простое строение:

$$H_t(B_{i,k} \cap F_0) = 0 \text{ при } t \neq n-1, 2n-2,$$

а «средняя» группа гомологий $H_{n-1}(B_{i,k} \cap F_0)$ является свободной абелевой группой ранга $\mu_{i,k} = (a_1^{i,k} - 1) \dots (a_n^{i,k} - 1)$, порожденной классами геометри-

чески явно описываемых циклов $\delta_{i,k}^1, \dots, \delta_{i,k}^{\mu_{i,k}}$ — локально исчезающими циклами (циклами Лефшетца) точки c_k^i . Порожденную ими группу будем обозначать $L_{i,k}$ и называть локальной группой Лефшетца точки c_k^i .

Л е м м а 1. *Ядро морфизма*

$$r_{i,k}^*: H_*(B_{i,k} \cap F_0) \rightarrow H_*(B_{i,k} \cap F_i),$$

индуцированного отображением $r_{i,k}$, совпадает с группой $L_{i,k}$, а ядро морфизма

$$r_i^*: H_*(F_0) \rightarrow H_*(F_i)$$

порождается группами Лефшетца $L_{i,1}, \dots, L_{i,r_i}$, соответствующими особым точкам слоя F_i .

Мы обозначим группу $\text{Ker } r_i^*$ через $L_i = \{L_{i,1}, \dots, L_{i,r_i}\}$ и назовем группой Лефшетца, соответствующей слою F_i ; очевидно, что $L_i \subset H_{n-1}(F_s)$; она порождается классами циклов $\{\delta_{i,1}^1, \dots, \delta_{i,1}^{\mu_{i,1}}, \dots, \delta_{i,r_i}^1, \dots, \delta_{i,r_i}^{\mu_{i,r_i}}\}$.

2°. Рассмотрим теперь многообразие $V^n = W^n - F_\infty$. Отображение $j: W^n \rightarrow P^1$ индуцирует отображение $j: V^n \rightarrow A^1$, где A^1 — аффинная комплексная

прямая. Методом, аналогичным примененному автором в работе ⁽²⁾, можно показать, что каждому элементу $\alpha \in L_i \subset H_{n-1}(F_0)$ можно сопоставить элемент $\bar{\alpha} \in H_n(V)$; все такие элементы порождают подгруппу $\Delta \subset H_n(V)$. Кроме того, если оказывается, что локальный исчезающий цикл $\delta_{i,k}^n \in L_{i,k}$ гомологичен нулю на F_0 , то ему соответствует n -мерный цикл $S_i^n \subset F_i$, класс которого будет ненулевым элементом группы $H_n(F_i)$. Построение этих циклов проводится аналогично построению, проведенному в работах ^(2, 3).

Таким образом, определяется некоторая подгруппа $S_i = \{S_i^n\}$, $S_i \subset H_n(F_i)$. Подгруппы S_i порождают подгруппу $S \subset H_n(V)$.

Имеет место

Теорема 1. *Группа $H_n(V)$ порождается подгруппами S и Δ .*

Доказательство теоремы можно провести методом работы ⁽²⁾, либо изучая спектральную последовательность Лере отображения $f': V^n \rightarrow A^1$.

Аналогично отображениям $r_{i,k}$ можно построить отображения

$$\theta_{i,k}: B_{i,k} \cap F_0 \rightarrow B_{i,k} \cap F_0,$$

тождественные на границе ⁽⁴⁾. Эти отображения индуцируют морфизмы

$$\theta_{i,k}: H_*(B_{i,k} \cap F_0) \rightarrow H_*(B_{i,k} \cap F_0).$$

Интерес представляют нетривиальные морфизмы

$$\theta_{i,k}^{n-1}: H_{n-1}(F_0) \rightarrow H_{n-1}(F_0),$$

определяемые по формуле

$$\theta_{i,k}^{n-1}(h) = h + (-1)^{n(n+1)/2} (\tilde{e}_i^k, \tilde{\eta}) e_i^k,$$

где $h \in H_{n-1}(F_0)$, $\tilde{\eta} = jh$, $j: H_{n-1}(F_0) \rightarrow H_{n-1}(B_{i,k} \cap F_0)$, а $\tilde{e}_i^k$ — исчезающая клетка, соответствующая особой точке $c_i^k \in F_0$ (см. ⁽⁴⁾).

С помощью стандартной процедуры, изложенной в работе ⁽²⁾, можно определить подгруппы инвариантных циклов

$$\text{Inv}_{i,k} \subset H_{n-1}(F_0), \quad \text{Inv}_i \subset H_{n-1}(F_0),$$

$$\text{Inv} = \bigcap_i \text{Inv}_i \subset H_{n-1}(F_0).$$

Очевидно, что группа Inv ортогональна L в смысле соответствующего на $H_{n-1}(F_0)$ скалярного произведения. Имеет место утверждение об инвариантном расщеплении группы $H_{n-1}(F_0)$.

Теорема 2.

$$H_{n-1}(F_0) = \text{Inv} + (\text{Inv})^\perp.$$

Теорема доказывается соединением метода работы ⁽²⁾ автора и метода П. Делиня ^(5, 6), использующего понятие весовой фильтрации и обобщенной структуры Ходжа. Метод Делиня дает в данном случае естественную замену и обобщение обычно применяемой в случае расслоения алгебраического многообразия на гиперплоские сечения теоремы из теории Ходжа о гармонических формах на многообразии ^(6, 7).

Из леммы 1 и теорем 1 и 2 можно получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Группа $H_{n-1}(V^n)$ изоморфна подгруппе $\text{Inv} \subset H_{n-1}(F_0)$.*

Доказательство основывается на сопоставлении спектральных последовательностей Лере отображений

$$f': V \rightarrow A^1 \quad \text{и} \quad f'': V \rightarrow \bigcup_i F_i \rightarrow A^1 \rightarrow \bigcup_i (t_i);$$

получаемые при этом точные последовательности образуют коммутативную диаграмму. Как и в случае доказательства теоремы 2, необходимо применить предложенное Делинем обобщение теоремы ⁽⁷⁾ из теории Ходжа.

Из теоремы 1—3 обычными способами выводится интересующая нас связь между группами гомологий многообразия W^n , и группами гомологий общего слоя F_0 и «локальными данными».

Т е о р е м а 4. 1) $H_{n+1}(W^n) \approx \text{Inv} + H_{n+1}(F_0)$;

2) $H_n(W^n)$ порождается группами $H_n(F_0)$, подгруппами Δ и S , причем

$$\text{rank } H_n(W^n) = \text{rank } H_n(F_0) + \text{rank } S + \sum \mu_i + \text{rank } \text{Inv} - \text{rank } H_{n-1}(F_0).$$

Приведенные результаты, по-видимому, сохраняются в случае, когда слои в окрестности изолированной особой точки могут быть заданы взвешенными однородными многочленами (см. (1)). В случае произвольных изолированных особых точек в слоях справедливы несколько ослабленные формы утверждений теорем 1—4.

Отделение математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
9 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Дж. Милнор, Особые точки комплексных гиперповерхностей, М., «Мир», 1971. ² А. Б. Жижченко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, 765 (1961). ³ А. Б. Жижченко, ДАН, т. 128, № 4 (1959). ⁴ F. Pham, Bull. Soc. math. France, v. 193, 333 (1965). ⁵ Ф. А. Гриффитс, УМН, т. 25, в. 3, 175 (1970). ⁶ P. Deligne, Theorie de Hodge, I, II, III — Publication Mathematiques, Inst. des Hautes Etudes Scientifiques, Paris, 1970, 1971, 1972. ⁷ W. V. D. Hodge, The Theory and Applications of Harmonic Integrals, Cambridge Univ. Press, 1952.