

Е. В. ЩЕПИН

ОДНА ТЕОРЕМА О СКЛЕИВАНИИ АНТИПОДОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 10 II 1975)

1. Классическая теорема Борсука — Улама гласит, что всякое непрерывное отображение n -мерной сферы в евклидово пространство той же размерности склеивает некоторую пару антиподов. В книге Коннера и Флойда (⁽¹⁾), стр. 135) доказано, что всякое гомологически тривиальное отображение * сферы S^n и гладкое многообразие M^n склеивает некоторую пару антиподов. Там же поставлен вопрос о возможности доказательства аналогичной теоремы для отображений в топологические многообразия.

Основным результатом настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для любого гомотопного нулю отображения n -мерной сферы в топологическое многообразие той же размерности найдется пара диаметрально противоположных точек, которые при этом отображении переходят в одну.*

Из сформулированной теоремы непосредственно вытекает, что всякое отображение сферы в многообразии меньшей размерности склеивает пару антиподов. С другой стороны, автором этой заметки построен пример (см. (⁽²⁾)) отображения $(2n-1)$ -мерной сферы в n -мерный полиэдр, не склеивающего никакой пары антиподов, для $n \geq 2$. Из нашей теоремы нетрудно вывести, что если всякая точка полиэдра имеет окрестность, которая может быть вложена в n -мерное евклидово пространство, то всякое гомотопное нулю отображение сферы S^n в этот полиэдр склеивает пару антиподов. Действительно, в этом случае наш полиэдр можно глобально вложить в некоторое многообразие M^n и воспользоваться нашей теоремой. В частности, получается, что всякое гомотопное нулю отображение сферы S^{2n} в n -мерный полиэдр склеивает некоторую пару антиподов (условие гомотопности нулю в данном случае несущественно и может быть отброшено (см. (⁽²⁾))). Действительно, каждая точка n -мерного полиэдра имеет окрестность, являющуюся конусом над $(n-1)$ -мерным полиэдром и, следовательно, может быть вложена в евклидово пространство размерности $(2(n-1)+1)+1=2n$.

Но ответ на вопрос, всякое ли отображение сферы S^n в данный полиэдр P^h склеивает пару антиподов, не определяется возможностью его локального вложения в n -мерное евклидово пространство. Как показывает пример Мардешича и Сегала (см. (⁽³⁾)), существует четырехмерный стягиваемый полиэдр, который не вкладывается локально в четырехмерное пространство, но в то же время для любого $\varepsilon > 0$ допускает ε -отображение в R^4 , и поэтому всякое отображение в него сферы S^4 склеивает пару антиподов.

Интересно было бы найти критерий, позволяющий решать, существует ли отображение данной сферы S^n в данный полиэдр P^h , не склеивающее никакой пары антиподов.

2. Приводимое ниже доказательство использует теорию микрорасслоений, развитую Милнором (см. (⁽⁴⁾)). План доказательства таков: сначала мы сформулируем некоторую техническую лемму общетопологического характера и с ее помощью докажем нашу теорему, а потом докажем лемму.

* Под отображением мы здесь и далее подразумеваем непрерывное отображение.

Формулировке леммы мы предположим следующие обозначения: R^n — евклидово пространство размерности n ,

$$Q^n = \left\{ x = (x_1 \dots x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\},$$

S^n — единичная сфера, граница Q^{n+1} . Если $x = (x_1 \dots x_n) \in R^n$, то через $-x$ мы будем обозначать точку с координатами $(-x_1 \dots -x_n)$.

M^n — некоторое топологическое связное многообразие размерности n . Пусть $f: Q^{n+1} \rightarrow M^n$ — некоторое отображение, через $f|_{S^n}$ обозначается его ограничение на сферу. Положим

$$S(f) = \{x \in M^n: \text{существует такое } y \in Q^{n+1}, \text{ что } f(y) = f(-y) = x\}.$$

Аналогично определяется $S(f)$ для отображений сферы.

Лемма. Множество отображений $f: Q^{n+1} \rightarrow M^n$, удовлетворяющих условию $\dim S(f) \leq 1$ ($\dim$ — топологическая размерность), всюду плотно в пространстве всех непрерывных отображений из Q^{n+1} в M^n .

Доказательство теоремы. Предположим противное. Пусть $f: S^n \rightarrow M^n$ — гомотопное нулю отображение, для которого $S(f) = \emptyset$. Пусть $\tilde{f}: Q^{n+1} \rightarrow M^n$ — некоторое продолжение отображения f на Q^{n+1} . Так как отображение, достаточно близкое к отображению, не склеивающему антиподов, тоже не склеивает антиподов, то в силу леммы мы можем заменить $\tilde{f}$ на некоторое достаточно близкое отображение $\bar{f}$ так, что $S(\bar{f}|_{S^n}) = \emptyset$ и $\dim S(\bar{f}) \leq 1$.

В силу теоремы 5.8 из (4) мы можем считать, что наше многообразие лежит в евклидовом пространстве достаточно большой размерности $M^n \subset R^{n+q}$, причем обладает там окрестностью OM^n , которая является микрорасслоением с базой M^n относительно вложения M^n в R^{n+q} .

Нашу теорему достаточно доказать для односвязных многообразий. Действительно, для гомотопного нулю отображения существует поднятие в универсальное накрытие, которое, очевидно, не склеивает антиподов, если таковым было исходное отображение. Поэтому мы будем считать, что наше многообразие односвязно. Далее, $S(\bar{f})$ не более чем одномерно, поэтому его вложение в односвязное многообразие гомотопно нулю (для полиэдров это очевидно, а для общего случая нужно воспользоваться существованием сколь угодно малых сдвигов в полиэдры той же размерности). Следовательно, микрорасслоение, полученное ограничением микрорасслоения OM^n на $S(\bar{f})$ тривиально.

Выберем достаточно малую окрестность $OS(\bar{f})$ так, чтобы ограничение микрорасслоения OM^n на нее все еще было тривиальным. Таким образом, существует гомеоморфизм $\Phi: O'S(\bar{f}) \rightarrow OS(\bar{f}) \times R^q$ некоторой окрестности $O'S(\bar{f})$ множества $S(\bar{f})$ в R^{n+q} в произведение $OS(\bar{f}) \times R^q$, ограничение которого на $S(\bar{f})$ является естественным гомеоморфизмом на $S(\bar{f}) \times \{O\}$ (где O — начало координат в R^q).

Пусть φ — некоторая непрерывная вещественная функция равная 1 на $S(\bar{f})$ и 0 вне $OS(\bar{f})$. Рассмотрим следующее отображение F сферы S^{n+q} в R^{n+q} :

$$F(x_1 \dots x_{n+q+1}) = \begin{cases} \bar{f}(x_1 \dots x_{n+1}), & \text{если } \bar{f}(x_1 \dots x_{n+1}) \in M^n \setminus OS(\bar{f}), \\ \Phi^{-1}(\bar{f}(x_1 \dots x_{n+1}) \times \varphi(\bar{f}(x_1 \dots x_{n+1})) \cdot (x_{n+2} \dots x_{n+q+1})), & \\ \text{если } \bar{f}(x_1 \dots x_{n+1}) \in OS(\bar{f}). \end{cases}$$

Отображение F , очевидно, непрерывно. В силу теоремы Борсука — Улама для некоторого $x = (x_1 \dots x_{n+q+1})$ будет $F(x) = F(-x)$. Тогда, очевидно,

$$\bar{f}(x_1 \dots x_{n+1}) = \bar{f}(-x_1 \dots -x_{n+1}).$$

Т. е. $\bar{f}(x_1 \dots x_{n+1}) \in S(\bar{f})$ и, следовательно, $\varphi(\bar{f}(x_1 \dots x_{n+1})) = 1$. Так что

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1}(\bar{f}(x_1 \dots x_{n+1}) \times (x_{n+2} \dots x_{n+q+1})) = \\ & = \Phi^{-1}(\bar{f}(-x_1 \dots -x_{n+1}) \times (-x_{n+2} \dots -x_{n+q+1})), \end{aligned}$$

а так как Φ — гомеоморфизм, то отсюда $(x_{n+2} \dots x_{n+q+1}) = (-x_{n+2} \dots -x_{n+q+1})$, т. е. $x_{n+2} = x_{n+3} = \dots = x_{n+q+1} = 0$. Но тогда

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$$

и, следовательно, мы получим, что $\bar{f}(x) = \bar{f}(-x)$ для некоторой точки сферы S^n , что противоречит тому, что $f|_{S^n}$ не склеивает антиподов.

3. Доказательство леммы. Мы вначале докажем лемму для случая, когда M^n является евклидовым пространством R^n .

Для любого отображения $f: Q^{n+1} \rightarrow R^n$ определим отображение $f^*: Q^{n+1} \rightarrow R^n \times R^n$ следующим образом: $f^*(x) = f(x) \times f(-x)$. Определим $\sigma: R^n \times R^n \rightarrow R^n \times R^n$ равенством $\sigma(x \times y) = y \times x$. Тогда $\sigma f^* = f^*$. Такие отображения мы будем называть симметричными. Через Δ обозначим диагональ произведения $R^n \times R^n$. Тогда $i(S(f)) = f^*(Q^{n+1}) \cap \Delta$, где i — естественный гомеоморфизм, $i: R^n \rightarrow \Delta$. Таким образом, нам нужно доказать, что в пространстве симметричных отображений из Q^{n+1} в $R^n \times R^n$ (которое, очевидно, полно) множество отображений, для которых пересечение с диагональю имеет размерность ≤ 1 , является всюду плотным G_δ -множеством (т. е. пересечением счетного числа открытых множеств). То, что оно является G_δ -множеством, следует из того, что дополнение к нему представимо в виде объединения счетного числа замкнутых множеств F_n , где $f \in F_n$ в том и только том случае, когда $u_1(f(Q^{n+1}) \cap \Delta) \geq 1/n$ ($u_1 A$ — одномерный поперечник Урысона множества A , см. (5)). Осталось установить всюду плотность.

Но как легко видеть, всякое симметричное отображение можно аппроксимировать симметричным кусочно-линейным, и малым шевелением привести образ этого отображения в симметричный же полиэдр, находящийся в общем положении по отношению к диагонали. А два полиэдра размерностей $n+1$ и n в общем положении в $2n$ -мерном пространстве пересекаются по множеству размерности 1.

Рассмотрим теперь общий случай.

Пусть $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ — покрытие нашего многообразия открытыми множествами, гомеоморфными подмножествам R^n . Положим

$$O_i = \{f: Q^{n+1} \rightarrow M^n: \dim S(f) \cap U_i \leq 1\}, \quad i=1, 2, \dots$$

Тогда из рассмотренного нами частного случая следует, что O_i является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве отображений. Действительно, то что оно имеет тип G_δ , доказывается точно так же, как в рассмотренном выше случае. Всюду плотность устанавливается так. Будем считать, что $[U_i] \subset U'_i$, где U'_i — также открытое множество, вкладывающееся в R^n . Пусть $f: Q^{n+1} \rightarrow M^n$ — некоторое отображение и $g_i: M^n \rightarrow R^n$ является гомеоморфизмом на U'_i . Тогда $g_i f: Q^{n+1} \rightarrow R^n$ мы приблизим некоторым отображением $\tilde{f}$, удовлетворяющим условию $\dim S(\tilde{f}) \leq 1$. Пусть φ — непрерывная вещественная функция, равная 1 на U_i и 0 вне U'_i .

Тогда искомое приближение $\tilde{f}$ определяется так:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \in M^n \setminus U'_i, \\ g_i^{-1}(g_i f(x) \cdot (1 - \varphi f(x)) + \varphi(f(x)) \cdot \tilde{f}(x)), & \text{если } f(x) \in U'_i. \end{cases}$$

Наконец, пересечение счетного числа всюду плотных G_δ -множеств O_i является всюду плотным G_δ -множеством.

Лемма доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Коннер, Э. Флойд, Гладкие периодические отображения, М., 1969. ² Е. В. Щепин, ДАН, т. 217, № 1 (1974). ³ S. Mardešić, J. Segal, Michigan Mat. J., v. 14, № 2 (1967). ⁴ J. Milnor, Topology, v. 3, Suppl. 1, 1964. ⁵ К. Борсук, Теория ретрактов, М., 1971.