

УДК 511

МАТЕМАТИКА

Г. И. АРХИПОВ, В. Н. ЧУБАРИКОВ

О КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 II 1975)

В настоящей статье продолжено построение теории кратных тригонометрических сумм, начатое в ^(8, 9). Основу теории составляют оценки кратных тригонометрических сумм.

Теория строится по схеме, предложенной А. А. Карацубой. Она обобщает известный метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова ⁽¹⁻⁷⁾. Существо метода состоит в том, что оценка индивидуальной тригонометрической суммы Г. Вейля сводится путем сглаживания к оценке ее среднего значения.

Подобным образом оценку кратной тригонометрической суммы мы сводим к оценке ее среднего значения.

В данной статье приводится формулировка наиболее важной для дальнейших исследований теоремы о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы (теорема 1). Теорема доказывается по p -адической схеме А. А. Карацубы, основанной на его идее о сведении задачи на неполную систему вычетов к полной системе вычетов ⁽⁵⁾.

Из теоремы 1 выводится оценка простейшей кратной тригонометрической суммы с многочленом (теорема 2). Дальнейшие результаты (оценки кратных тригонометрических сумм общего вида, распределение дробных долей, асимптотические формулы уравнений и систем уравнений и др.) могут быть получены из теоремы 1 некоторой переработкой известных схем ^(1, 2), что будет сделано нами в дальнейшем.

Путем незначительного видоизменения доказательства теорема о среднем может быть уточнена и обобщена.

Обозначения. A и Λ — выборы чисел $a_{t_1, \dots, t_r}; \lambda_{t_1, \dots, t_r}$ соответственно с условием $0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n$;

$$A \times \Lambda = \sum_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} a_{t_1, \dots, t_r} \lambda_{t_1, \dots, t_r},$$

$$f_A(x_1, \dots, x_r) = \sum_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} a_{t_1, \dots, t_r} x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r};$$

$n \geq 2$ — целое, Ω — единичный M -мерный куб, $M = (n+1)^r$. $J_n(k, P, \Lambda)$ — число решений системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} = \lambda_{t_1, \dots, t_r},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, \quad (1)$$

где $\lambda_{t_1, \dots, t_r}$ — фиксированные целые числа; $x_{1,j}, \dots, x_{r,j}$, $j=1, \dots, 2k$, — неизвестные,

$$1 \leq x_{1,j}, \dots, x_{r,j} \leq P; \quad j=1, \dots, 2k.$$

Для нулевого набора Λ число решений системы уравнений (1) обозначим через $J_n(k, P)$. Тогда

$$J_n(k, P, \Lambda) = \int_{\Omega} \left| \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_r \leq P} e^{2\pi i f_{\Lambda}(x_1, \dots, x_r)} \right|^{2k} e^{-2\pi i (A \times \Lambda)} dA.$$

Отсюда следует, что:

а) $J_n(k, P, \Lambda) \leq J_n(k, P)$;

$$\text{б) } \left| \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_r \leq P} e^{2\pi i f_{\Lambda}(x_1, \dots, x_r)} \right|^{2k} = \sum_{\Lambda} J_n(k, P, \Lambda) e^{2\pi i (A \times \Lambda)};$$

$$\text{в) } \sum_{\Lambda} J_n(k, P, \Lambda) = P^{2kr},$$

где $\sum$ означает суммирование по всевозможным целочисленным наборам Λ . Кроме того, из а) и в) имеем, что

$$J_n(k, P) \geq (2k)^{-M} P^{2kr - rnM/2}.$$

Теорема 1. Пусть $\tau \geq 0$ — целое, $P \geq 1$ — целое,

$$k(\tau, n) = M(\tau + r); \quad u(\tau, n) = \min(\tau, rn).$$

Тогда при любом целом $k \geq k(\tau, n)$ имеет место оценка

$$J_n(k, P) \leq k^{rnM + 2M\tau} 3^{3r^2nM\tau} (nr)^{3rnMu(\tau, n)} P^{2kr - rnM/2 + \delta(\tau, n)},$$

где

$$\delta(\tau, n) = \frac{rnM}{2} \left(1 - \frac{1}{\tau n} \right)^{\tau}.$$

Доказательство теоремы существенно опирается на следующие леммы.

Лемма 1 (о полной системе). Пусть p — простое число, $m \geq 1$ — целое и T — число решений системы сравнений

$$\sum_{j=1}^{2M} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} \equiv \lambda_{t_1, \dots, t_r} \pmod{p^{t_1 + \dots + t_r}},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n,$$

где $\lambda_{t_1, \dots, t_r}$ — фиксированные целые числа,

$$A \leq x_{s,j} < mp^{nr} + A, \quad s=1, \dots, r, \quad j=1, \dots, 2M.$$

Кроме того, неизвестные $x_{s,j}$, $s=1, \dots, r$, $j=1, \dots, 2M$, удовлетворяют условию линейной независимости по $\text{mod } p$, т. е. для каждого набора целых чисел $c_{t_1, \dots, t_r}$, одновременно не сравнимых с 0 по $\text{mod } p$, существует k_0 такое, что

$$\sum_{0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n} c_{t_1, \dots, t_r} x_{1,k_0}^{t_1} \dots x_{r,k_0}^{t_r} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Тогда выполняется оценка

$$T \leq M! \quad m^{2rM} p^{-rnM/2 + 2r^2nM}.$$

Лемма 2. Пусть $P \geq 1$, p — простое число,

$$1/2 P^{1/rn} < p \leq P^{1/rn}, \quad P_1 = [Pp^{-1}] + 1.$$

Тогда

$$J_n(k, P) \leq k^{2M} 3^{3Mr^2n-2} p^{\frac{2kr + 2r^2nM - rnM}{2} - 2rM} J_n(k-M, P_1) +$$

$$+ 4(M-1)! (nr)^k p^{2kr-k} J_n(k, P_1)$$

Теорема 1 выводится из леммы 2 индукцией по параметрам P и τ .
Заметим, что при $k \geq cMrn \log rnM$, где $c > 0$ — некоторая постоянная, оценка сверху для $J_n(k, P)$ близка по порядку к оценке снизу.

Теорема 2. Пусть $P \geq 1$,

$$S = \sum_{x_1, \dots, x_r=1}^P e^{2\pi i f_A(x_1, \dots, x_r)},$$

$$\alpha = \alpha_{n, n, \dots, n} = a/q + \theta/q^2, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq P^{nr}, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тогда имеем

$$|S| \leq e^{2 \log(M\tau_1) + \sigma r^2 n + 2} P^{r-\rho},$$

где

$$\rho = \frac{3\tau}{32M\tau_1}, \quad \tau_1 = 2n \log \frac{2nM}{\tau},$$

а величина τ определяется равенствами:

- а) $q = P^{\tau_0}$, если $P^{\tau_0} < q \leq P$;
- б) $\tau = 1$, если $P < q \leq P^{nr-1}$;
- в) $q = P^{nr-\tau}$, если $P^{nr-1} < q < P^{nr-\tau_0}$,

$\tau_0 > 0$ — произвольно малое число.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. А. А. Карацубе за научное руководство.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971.
² И. М. Виноградов, Избр. тр., М., 1952. ³ А. А. Карацуба, Вестн. Московск. унив., сер. 1, 28 (1962). ⁴ Ю. В. Линник, ДАН, т. 34, № 7 (1942). ⁵ А. А. Карацуба, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 1 (1966). ⁶ А. А. Карацуба, Там же, т. 37, № 6 (1973).
⁷ К. Чандрасекаран, Арифметические функции, М., 1975. ⁸ Г. И. Архипов, ДАН, т. 219, № 5 (1974). ⁹ Г. И. Архипов, Матем. заметки, т. 17, в. 1 (1975).