

УДК 62-50

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. П. ПЕРОВ

СИНТЕЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ОБОБЩЕННОМУ КРИТЕРИЮ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 2 I 1975)

Синтез статистически оптимальных нестационарных систем с учетом требований к их динамическим свойствам и реализуемости возможен на основе использования обобщенного критерия качества ⁽¹⁾

$$f = \chi^2 + \zeta^2, \quad \chi^2 = \int_0^{\infty} l^2(\tau) k^2(t, \tau) d\tau;$$

$l^2(\tau)$ — ограничивающая функция, предопределяющая динамические свойства; $k(t, \tau)$ — весовая функция системы (реакция на единичное импульсное воздействие); $\zeta^2 = [x(t) - x_0(t)]^2$ — средний по множеству квадрат ошибки (черта означает осреднение по множеству реализаций); $x(t)$, $x_0(t)$ — соответственно выходная и оцениваемая функции, которые при воздействии на вход системы аддитивной смеси $y(t) = s(t) + n(t)$ сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$ определяются равенствами

$$x(t) = \int_0^{\infty} y(t-\tau) k(t, \tau) d\tau, \quad x_0(t) = h s(t) = \int_0^{\infty} s(t-\tau) h(t, \tau) d\tau, \quad (1)$$

h , $h(t, \tau)$ — оператор и весовая функция требуемого преобразования сигнала.

Оптимальная $k(t, \tau)$, дающая минимум f , удовлетворяет уравнению ^(2, 3)

$$k(t, \tau) l^2(\tau) + \int_0^{\infty} \overline{y(t-\tau) y(t-\lambda)} k(t, \lambda) d\lambda = \overline{y(t-\tau) x_0(t)}. \quad (2)$$

Найдем решение уравнения (2), предположив, что помеха состоит из белого шума $c(t)$, не коррелированного с остальной частью входного процесса, и составляющей $p(t)$, которую, как и сигнал $s(t)$, на интервале $[t-T, t]$ (T — память искомого оператора) можно представить усеченным рядом Фурье ⁽⁴⁻⁶⁾

$$n(t) = p(t) + c(t), \quad y(t) = z(t) + c(t), \quad z(t) = s(t) + p(t),$$

$$s(t-\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{A-1} s_{\alpha}(t) \vartheta_{\alpha}(\lambda), \quad p(t-\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{A-1} p_{\alpha}(t) \vartheta_{\alpha}(\lambda),$$

$$z(t-\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{A-1} z_{\alpha}(t) \vartheta_{\alpha}(\lambda), \quad z_{\alpha}(t) = s_{\alpha}(t) + p_{\alpha}(t);$$

$s_{\alpha}(t)$, $p_{\alpha}(t)$, $z_{\alpha}(t)$ — текущие спектры функций $s(t)$, $p(t)$, $z(t)$ на интервале $[t-T, t]$ в базисе $\vartheta_{\alpha}(\lambda)$; $\{\vartheta_{\alpha}(\lambda)\}$ — система базисных функций, орто-

нормированных на интервале $[0, T]$ с весом $\bar{\omega}^2(\lambda)$, или, что то же, на интервале $[0, \infty)$ с весом $\omega^2(\lambda) = (1[\lambda] - 1[T - \lambda]) \bar{\omega}^2(\lambda)$,

$$\int_0^{\infty} \omega^2(\lambda) \vartheta_{\alpha}(\lambda) \vartheta_{\beta}(\lambda) d\lambda = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Связь между функцией и ее спектром в базисе $\vartheta_{\alpha}(\lambda)$ согласно (4) выражается соотношениями

$$\varphi(t - \lambda) = \sum_{\alpha=0}^{A-1} \varphi_{\alpha}(t) \vartheta_{\alpha}(\lambda), \quad \varphi_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} \varphi(t - \lambda) \omega^2(\lambda) \vartheta_{\alpha}(\lambda) d\lambda. \quad (5)$$

На основании (1), (3), (4) и равенства $\overline{c(t - \tau)c(t - \lambda)} = c^2(t) \delta(\tau - \lambda)$, исходное уравнение (2) приводится к виду

$$k(t, \tau) [l^2(\tau) + c^2(t)] + \sum_{\alpha, \beta=0}^{A-1} z_{\alpha\beta}(t) \vartheta_{\alpha}(\tau) k_{\beta}(t) = \sum_{\alpha, \beta=0}^{A-1} s_{\alpha\beta}(t) \vartheta_{\alpha}(\tau) h_{\beta}(t), \quad (6)$$

где

$$z_{\alpha\beta}(t) = \overline{z_{\alpha}(t) z_{\beta}(t)}, \quad s_{\alpha\beta}(t) = \overline{z_{\alpha}(t) s_{\beta}(t)},$$

$$k_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} k(t, \lambda) \vartheta_{\alpha}(\lambda) d\lambda, \quad h_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} h(t, \lambda) \vartheta_{\alpha}(\lambda) d\lambda, \quad (7)$$

$k_{\alpha}(t)$, $h_{\alpha}(t)$, $\alpha \in [0, A-1]$, — моменты весовых функций $k(t, \lambda)$, $h(t, \lambda)$ в базисе $\vartheta_{\alpha}(\lambda)$. Согласно (7) и (4),

$$k(t, \lambda) = \omega^2(\lambda) \sum_{\alpha=0}^{A-1} k_{\alpha}(t) \vartheta_{\alpha}(\lambda), \quad (8)$$

т. е. искомая весовая функция просто выражается через ее моменты $k_{\alpha}(t)$. Задав $l^2(t)$ в виде (7)

$$l^2(\tau) = c^2(t) [\omega^{-2}(\tau) - 1], \quad (9)$$

после умножения (6) на $\vartheta_{\nu}(\tau) \omega^2(\tau)$, $\nu \in [0, A-1]$, и интегрирования в пределах $(0, \infty)$, с учетом (4), приходим к системе линейных алгебраических уравнений для $k_{\alpha}(t)$

$$\sum_{\alpha=0}^{A-1} y_{\nu\alpha}(t) k_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha=0}^{A-1} s_{\nu\alpha}(t) h_{\alpha}(t), \quad \nu \in [0, A-1], \quad y_{\nu\alpha}(t) = z_{\nu\alpha}(t) + c^2(t) \delta_{\nu\alpha}. \quad (10)$$

Систему уравнений (10) и ее решение можно записать в матричной форме

$$YK = SH, \quad K = Y^{-1}SH, \quad (11)$$

$$K = \{k_{\alpha}(t)\}_{A \times 1}, \quad H = \{h_{\alpha}(t)\}_{A \times 1}, \quad Y = \{Y_{\nu\alpha}(t)\}_{A \times A}, \quad S = \{s_{\nu\alpha}(t)\}_{A \times A},$$

Y^{-1} — матрица, обратная к Y . Равенства (8), (11) определяют искомое решение уравнения (2). В матричной форме

$$k(t, \lambda) = \omega^2(\lambda) \Theta K = \omega^2(\lambda) \Theta Y^{-1}SH, \quad \Theta = \{\vartheta_{\alpha}(\lambda)\}_{1 \times A}.$$

Моменты $h_{\alpha}(t)$, входящие в решение, легко находятся с помощью формулы

$$h_{\alpha}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} h \vartheta_{\alpha}(-\lambda), \quad (12)$$

которая записана на основании равенства

$$\sum_{\alpha=0}^{A-1} s_{\alpha}(t) [\lim_{\lambda \rightarrow 0} h \vartheta_{\alpha}(-\lambda)] = \sum_{\alpha=0}^{A-1} s_{\alpha}(t) h_{\alpha}(t),$$

непосредственно следующего из (1), (3), (7) в предположении, что $hs(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} h_{\lambda} s(t+\lambda)$, где h_{λ} — оператор h , действующий на $s(t+\lambda)$, как функ-

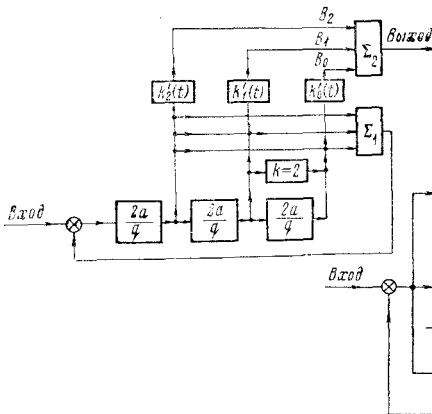


Рис. 1. Нестационарная система с оптимальной передаточной функцией (17), получаемой при использовании базиса Лагерра

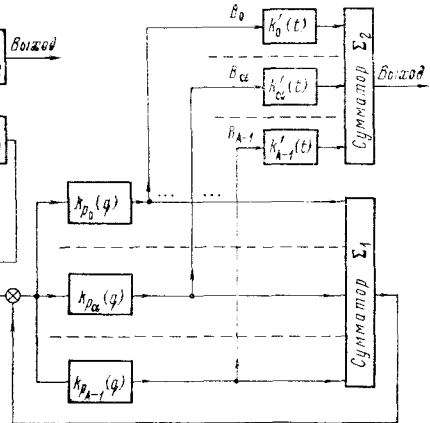


Рис. 2. Общая схема оптимальной нестационарной системы с передаточной функцией (14)

цию λ . В частности, при воспроизведении входного сигнала ($h=1$) на основании (12) имеем

$$h_{\alpha}(t) = \vartheta_{\alpha}(0). \quad (13)$$

Согласно (8), передаточная функция оптимальной системы

$$k(t, q) = \sum_{\alpha=0}^{A-1} k_{\alpha}(t) k_{\alpha}(q), \quad k_{\alpha}(q) = \int_0^{\infty} \omega^2(\lambda) \vartheta_{\alpha}(\lambda) e^{-q\lambda} d\lambda. \quad (14)$$

Реализация (14) в виде разомкнутой системы при соответствующем выборе $\omega^2(\lambda)$, $\vartheta_{\alpha}(\lambda)$ достаточно проста, однако наибольший интерес может представить реализация (14) в виде замкнутой системы, изображенной на рис. 2, где приняты обозначения

$$k_{\alpha}'(t) = \vartheta_{\alpha}^{-1}(0) k_{\alpha}(t), \quad k_{p_{\alpha}}(q) = \frac{\vartheta_{\alpha}(0) k_{\alpha}(q)}{1 - k_{z_1}(q)}; \quad (15)$$

$$k_{z_1}(q) = \sum_{\alpha=0}^{A-1} \vartheta_{\alpha}(0) k_{\alpha}(q), \quad \alpha \in [0, A-1], \quad (16)$$

причем $k_{z_1}(q)$ есть передаточная функция замкнутой стационарной части системы (по отношению к выходу сумматора Σ_1). Передаточная функция $k_{z_2}(q)$ всей системы (по отношению к выходу Σ_2) определяется выражением (14), что следует из равенств

$$k_{z_2}(q) = [1 - k_{z_1}(q)] k_{p_{\alpha}}(q) = \vartheta_{\alpha}(0) k_{\alpha}(q), \quad k_{z_2}(q) = \sum_{\alpha=0}^{A-1} k_{\alpha}'(t) k_{z_2}(q),$$

где $k_{B\alpha}(q)$ — передаточные функции по отношению к промежуточным выходам B_α , $\alpha=0, 1, \dots, A-1$.

Важно отметить, что замкнутая стационарная часть системы точно воспроизводит сигнал и помеху, спектр которой совпадает со спектром сигнала. Действительно, предположив в (11) $Y^{-1}=S^{-1}$ (случай отсутствия помех), на основании (13), (14) приходим к выражению передаточной функции системы несмещенного воспроизведения сигнала, совпадающему с (16). Благодаря отмеченному обстоятельству, диапазон рассогласований на входе неполностью замкнутой системы (рис. 2) существенно уменьшается, что является ее достоинством. В оптимальной системе, полностью замкнутой (с обратной связью относительно конечного выхода), например, в системе, рассмотренной в (8), при наличии существенных помех принципиально неизбежны значительные рассогласования между функциями, сравниваемыми на ее входе. Достоинством полученного решения является также относительная простота определения коэффициентов $k_\alpha(t)$, вследствие чего возможен синтез адаптивных систем на основе полученной оптимальной нестационарной системы.

В заключение рассмотрим частный пример, задав ограничивающую функцию в виде (9) при $\omega^2(\tau)=e^{-2a\tau}$ (экспоненциальное ограничение (7)) и приняв в качестве базисных функций полиномы Лагерра (9, 10)

$$\vartheta_\alpha(\tau)=L_\alpha(\tau)\sqrt{2a}\sum_{v=0}^{\alpha}(-1)^v C_{\alpha-v}^v \frac{(2a\tau)^v}{v!},$$

ортонормированные на интервале $[0, \infty)$ с весом $\omega^2(\tau)=e^{-2a\tau}$. В этом случае оптимальные весовая и передаточная функции, согласно (8), (14), имеют вид

$$k(t, \tau)=e^{-2a\tau}\sum_{\alpha=0}^{A-1}k_\alpha(t)L_\alpha(\tau), \quad k(t, q)=\sum_{\alpha=0}^{A-1}k_\alpha(t)k_\alpha(q), \quad (17)$$

$$k_\alpha(q)=\int_0^\infty e^{-2a\tau}L_\alpha(t)e^{-q\tau}d\tau=\frac{\sqrt{2a}}{q+2a}\left(\frac{q}{q+2a}\right)^\alpha.$$

Они реализуются системой, изображенной на рис. 2, при

$$k_\alpha'(t)=\frac{k_\alpha(t)}{\sqrt{2a}}, \quad k_{p_\alpha}(q)=\frac{\sqrt{2a}k_\alpha(q)}{1-k_{z_1}(q)}=$$

$$=\sum_{v=0}^{A-1-\alpha}C_{A-1-\alpha}^v\left(\frac{2a}{q}\right)^{v+1}, \quad k_{z_1}(q)=1-\left(\frac{q}{q+2a}\right)^A.$$

Последняя в рассматриваемом случае может быть сведена к более простой эквивалентной системе, состоящей из комбинации интегрирующих звеньев, общее достаточное количество которых равно A . На рис. 1 приведена такая эквивалентная система в случае $A=3$.

Поступило
17 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. П. Перов, ДАН, т. 247, № 2 (1974). ² Н. И. Андреев, Корреляционная теория статистически оптимальных систем, «Наука», 1966. ³ В. П. Перов, Техническая кибернетика, № 5 (1973). ⁴ В. И. Куля, Ортогональные фильтры, Киев, «Техника», 1967. ⁵ А. М. Трахтман, Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов, «Советское радио», 1972. ⁶ В. В. Солодовников, В. В. Семенов, Спектральная теория нестационарных систем управления, «Наука», 1974. ⁷ В. П. Перов, Техническая кибернетика, № 3 (1974). ⁸ R. E. Kalman, R. S. Bucy, J. Basic Eng. Trans. ASME, Paper № 60-1AG-42, 1 (1960). ⁹ Г. Сёге, Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962. ¹⁰ Г. Вейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, «Наука», 1966.