

В. П. ПЕТРЕНКО

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 15 I 1975)

1°. Постановка задачи. Методы, используемые в теории p -мерных целых кривых (см. (1-7)), можно применить при исследовании роста и распределения значений некоторых общих классов целых функций многих комплексных переменных. Постановка соответствующей задачи частично была описана нами в работах (8, 9).

Пусть $f(\xi) = f(z, w)$ — целая функция переменных $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-k})$ и $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$, для которой $f(z_0, w) \neq \text{const}$ при каждом фиксированном z_0 и $f(z, w_0) \neq \text{const}$ при каждом фиксированном w_0 . Пусть $\lambda(v) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v)$, $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k=1, 2, \dots, v$, — единичный v -мерный комплексный вектор (т. е. $|\lambda(v)| = 1$), а $S_{2v-1} = S(v)$ — единичная сфера в евклидовом пространстве R^{2v} переменных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v$. Положим при фиксированном z

$$M(z, R, f) = \max_{|\lambda(k)|=1} |f(z, R, \lambda(k))|$$

и пусть

$$T(r, R, f) = \frac{1}{\sigma(n-k)} \int_{S(n-k)} \ln M(r \cdot \lambda(n-k), R, f) d\tau(n-k), \quad (1.1)$$

где $d\tau(v)$ означает $(2v-1)$ -мерный элемент объема и $\sigma(v)$ — площадь поверхности единичной сферы в R^{2v} . Заметим, что функция $T(r, R, f)$ — не убывающая функция по каждой из переменных r и R и является выпуклой функцией относительно $\ln r$ и $\ln R$ (см. (9), стр. 107; (10), стр. 123). Обозначим через $\lambda_1 = \lambda_1(f)$ (соответственно через $\rho_1 = \rho_1(f)$) нижний порядок функции $T(r, R, f)$ по переменной r (порядок по переменной r), а через $\lambda_2 = \lambda_2(f)$ (соответственно через $\rho_2 = \rho_2(f)$) нижний порядок функции $T(r, R, f)$ по переменной R (порядок по переменной R). Пусть

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, R, f)}{T(r, 1, f)} = \alpha(R, f).$$

Ясно, что $\alpha(R, f)$ — не убывающая функция относительно R .

Определение. Будем говорить, что функция $f(z, w)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, если для нее

$$\lim \alpha(R, f) = \mu(f) < \infty. \quad (1.2)$$

Если

$$f(z, w) \in \mathfrak{M},$$

то ее характеристику роста определяем так:

$$T(r, f) = T(r, 1, f), \quad (1.3)$$

где $T(r, R, f)$ определена соотношением (1.1). С помощью этой функции $T(r, f)$ естественным образом определяем порядок роста $\rho = \rho(f)$ функции $f(z, w) \in \mathfrak{M}$ и ее нижний порядок роста $\lambda = \lambda(f)$. Кроме этого, для каждого

фиксированного $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ полагаем

$$m(r, w, f) = \frac{1}{\sigma(n-k)} \int_{S(n-k)} \ln \frac{M(r\lambda(n-k), 1+|w|, f)}{|f(r\lambda(n-k), w)|} d\tau(n-k),$$

$$L(r, w, f) = \max_{|\lambda(n-k)|=1} \ln \frac{M(r\lambda(n-k), 1+|w|, f)}{|f(r\lambda(n-k), w)|},$$

$$\delta(w, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, w, f)}{T(r, f)}, \quad \beta(w, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(r, w, f)}{T(r, f)}.$$

Величину $\delta(w, f)$ мы называем величиной дефекта функции $f(z, w)$ относительно w , а величину $\beta(w, f)$ величиной ее отклонения относительно w (см. (6)). Множество дефектных значений $D(f)$ и множество $\Omega(f)$ положительных отклонений функции $f(z, w)$ определяем так:

$$D(f) = \{w: \delta(w, f) > 0\}, \quad \Omega(f) = \{w: \beta(w, f) > 0\}.$$

2°. Основные результаты работы.

Теорема 1. Если $f(z, w) \in \mathfrak{M}$, то

а) $\delta(w, f) \leq \mu(f)$, где $\mu(f)$ определено соотношением (1,2);

б) для каждого фиксированного единичного k -мерного комплексного вектора $\lambda_0(k) = (\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_k^0)$ множество

$$E(\lambda_0(k)) = \{w \in C^1: w = \lambda_0(k) \cdot w \in D(f)\}$$

имеет нулевую плоскую меру.

Теорема 2. Если $f(z, w)$ — целая функция переменных z и w , для которой $\lambda_1(f) < \infty$, а $\rho_2(f) = 0$, то $f(z, w) \in \mathfrak{M}$ и при этом $\mu(f) = 1$.

Теорема 2 является точной в том смысле, что в ней нельзя снять требование $\rho_2(f) = 0$. В этом направлении имеет место *

Теорема 3. Для любого λ , $0 < \lambda < \infty$, существует целая функция $E_\lambda(z, w)$ двух переменных z и w , для которой выполняются соотношения:

а) $\lambda = \lambda_1(E_\lambda) = \lambda_2(E_\lambda) = \rho_1(E_\lambda) = \rho_2(E_\lambda)$;

б)

$$\alpha(R, E_\lambda) = R^\lambda; \quad (1,4)$$

в) для каждого w такого, что $|w| > 1$ и $|\arg w| \leq \pi/4(\lambda+1)$,

$$m(r, w, E_\lambda) \geq K \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^2 T(r, 1, E_\lambda). \quad (1,5)$$

Соотношение (1,4) показывает, что $E_\lambda(z, w) \notin \mathfrak{M}$, а соотношение (1,5) показывает, что для $E_\lambda(z, w)$ множества $D(E_\lambda)$ и $\Omega(E_\lambda)$ перестают быть исключительными.

3°. Взаимоотношения между классами M и $\mathfrak{M}$. Ранее мы ввели класс функций M (см. (6, 8)). А именно, будем говорить, что $f(z, w) \in M$, если для нее при любом $k \geq 1$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(1, r^k, f)}{T(r, 1, f)} = C(k, f) < \infty,$$

где $T(r, R, f)$ по-прежнему определено соотношением (1,1). Если функция $f(z, w) \in M$ и имеет конечный нижний порядок, то ее множество $\Omega(f)$ является исключительным множеством в смысле теоремы 1 (см. (6, 8)).

Следующие две теоремы показывают, что класс $\mathfrak{M}$ шире класса M .

Теорема 4. Если $f(z, w) \in M$ и имеет конечный нижний порядок λ , то $f(z, w) \in \mathfrak{M}$ и при этом $\mu(f) = 1$.

Теорема 5. Для любого λ , $0 \leq \lambda < \infty$, любого n , $n \geq 2$, и любого k , $1 \leq k \leq n-1$, существует целая функция $f(z, w)$ переменных $z =$

* Напомним, что $\lambda_1(f)$, $\lambda_2(f)$, $\rho_1(f)$, $\rho_2(f)$ мы определяем по функции $T(r, R, f)$.

$= (z_1, z_2, \dots, z_{n-k})$ и $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, принадлежащая классу $\mathfrak{M}$, для которой $\mu(f) = 1$, и при любом $k \geq 1$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(1, r^k, f)}{T(r, 1, f)} = \infty.$$

4°. Замечание о росте и распределении значений алгеброидных функций. Пусть $w = f(z)$ — трансцендентная алгеброидная мероморфная функция, т. е. $f(z)$ удовлетворяет уравнению (см. ^(11, 12, 3))

$$g_n(z) \cdot w^n + g_{n-1}(z) \cdot w^{n-1} + \dots + g_0(z) = 0, \quad (4.1)$$

где $\{g_k(z)\}_{k=0}^n$ — линейно независимые целые функции, имеющие самое большое конечное число общих корней и хотя бы одно из отношений $g_k(z)/g_v(z)$, $v \neq k$, является трансцендентной мероморфной функцией. Вместе с алгеброидной мероморфной функцией $f(z)$, определенной уравнением (4.1), будем рассматривать $(n+1)$ -мерную целую кривую (см. ^(1, 3, 5-7)) $G_f(z) = \{g_0(z), g_1(z), \dots, g_n(z)\}$. Характеристикой роста алгеброидной функции $f(z)$ называется характеристика роста соответствующей $(n+1)$ -мерной целой кривой $G_f(z)$. Пусть $\{f_v(z)\}_{v=1}^n$ — значения $f(z)$. Для каждого комплексного числа $a \neq \infty$ полагаем

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \max_{1 \leq v \leq n} \ln^+ \frac{1}{|f_v(re^{i\theta}) - a|} \right\} d\theta,$$

$$L(r, a, f) = \max_{|z|=r} \left\{ \max_{1 \leq v \leq n} \ln^+ \frac{1}{|f_v(z) - a|} \right\}.$$

Аналогично вводятся величины $m(r, \infty, f)$ и $L(r, \infty, f)$. Далее естественным образом определяются дефекты и величины отклонений алгеброидной функции

$$\delta(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}, \quad \beta(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Пусть

$$D(f) = \{a: \delta(a, f) > 0\}, \quad \Omega(f) = \{a: \beta(a, f) > 0\}.$$

Рассмотрим фиксированную допустимую систему векторов $A(w) = \{a(w)\}$, где при $w \neq \infty$ $a(w) = (1, w, \dots, w^n)$ и $a(\infty) = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Имеет место такое утверждение о связи между величинами дефектов и величинами отклонений для алгеброидных функций и соответствующих им целых кривых.

Теорема 6. Для каждого комплексного числа w имеют место оценки

$$\delta(w, f) \leq \delta(a(w), G_f), \quad \beta(w, f) \leq \beta(a(w), G_f). \quad (4.2)$$

Из оценок (4.2) вытекают многочисленные следствия о свойствах величин $\delta(w, f)$ и $\beta(w, f)$ и множеств $D(f)$ и $\Omega(f)$ для произвольной n -значной алгеброидной функции $f(z)$, которые непосредственно следуют из соответствующих утверждений для $(n+1)$ -мерных целых кривых (см. ⁽¹³⁻¹⁵⁾).

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
6 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Weyl, Meromorphic Functions and Analytic Curves, Princeton, 1943. ² L. Ahlfors, Acta Soc. Sci. Fenn., v. 3, № 4, 1 (1941). ³ H. Cartan, Mathematika, v. 7, № 5 (1933). ⁴ А. А. Гольдберг, Дополнение к кн. Г. Виттиха, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., Физматгиз, 1960. ⁵ В. П. Петренко, ДАН, т. 207, № 3, 537 (1972). ⁶ В. П. Петренко, ДАН, т. 216, № 3, 982 (1974). ⁷ В. П. Петренко, М. Хуссейн, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 2, 466 (1973). ⁸ В. П. Петренко, Доп. АН УРСР, сер. А, № 9, 792 (1974). ⁹ В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., «Наука», 1964. ¹⁰ Л. И. Ронкин, Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных, М., «Наука», 1971. ¹¹ G. Valiron, Bull. Soc. Math. France, v. 59, 17 (1931). ¹² K. Niino, Kodai Math. Semin. Rep., v. 25, 385 (1973). ¹³ В. И. Кригинь, Доп. АН УРСР, сер. А, № 9, 789 (1974). ¹⁴ В. П. Петренко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, № 2, 414 (1969).