

УДК 621.391.23:621.391.28-29:62-506.3

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

А. С. УСКОВ

МЕТОД ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 10 XI 1974)

В последнее время большое внимание уделяется задачам, связанным с исследованием информационно-измерительных систем и систем управления в условиях неполной априорной информации о сигналах и помехах. Основополагающими работами в этом направлении явились классические труды Б. В. Булгакова, посвященные проблеме накопления отклонений (^{1, 2}). Непосредственным их продолжением являются исследования, в которых рассматриваются вопросы анализа динамической точности при

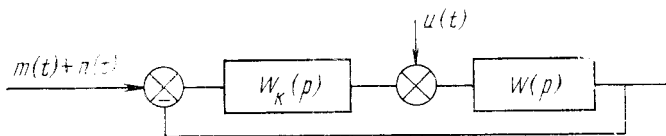


Рис. 1

случайных воздействиях с неизвестными спектральными характеристиками (³). Одна из задач настоящей заметки заключается в дальнейшем развитии этого направления.

Предлагаемый метод экстремальных характеристик позволяет анализировать динамическую точность информационных систем при ограниченной априорной информации о случайном сигнале и помехах, а также указать пути оптимизации широкого класса информационных систем и систем управления.

Схема на рис. 1 соответствует информационной системе типа воспроизведения (датчик, приборная следящая система); $W(p)$ — передаточная функция неизменяемой части системы, $W_k(p)$ — передаточная функция корректирующего звена.

В рассматриваемой системе на вход поступает сигнал $m(t)$ с наложенной на него помехой $n(t)$. Имеется внутренняя помеха $u(t)$; $m(t)$, $n(t)$, $u(t)$ являются стационарными, случайными, взаимно некоррелированными гауссовскими процессами с известными спектральными плотностями $S_m(\omega)$, $S_n(\omega)$, $S_u(\omega)$ и равными нулю математическими ожиданиями. Система должна воспроизводить на выходе сигнал $m(t)$, поступающий на ее вход.

Требуется определить спектральные плотности сигнала и помех, при которых величина среднего квадрата случайной ошибки (с.к.о.) имеет экстремальное значение.

Для предельных характеристик (^{4, 5}) решение задачи сводится к исследованию на экстремум функционала

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega, \quad (1)$$

где

$$S(\omega) = S_s(\omega) + \lambda S_m(\omega) + \mu S_n(\omega) + \nu S_u^*(\omega). \quad (2)$$

Спектральная плотность ошибки предельного фильтра

$$S_e(\omega) = \frac{[S_n(\omega) + S_u^*(\omega)] S_n(\omega)}{S_m(\omega) + S_n(\omega) + S_u^*(\omega)}, \quad (3)$$

$S_u^*(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_u(\omega)$ — спектральная плотность помехи, отнесенной к выходу (*).

Появление в выражении (2) членов с множителями Лагранжа обусловлено ограничениями, наложенными на мощности сигнала и помех:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(\omega) d\omega = \sigma_m^2; \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega) d\omega = \sigma_n^2; \quad (5)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u^*(\omega) d\omega = \sigma_u^2. \quad (6)$$

Множители Лагранжа λ , μ , ν представляют собой постоянные величины, которые определяются подстановкой найденных экстремальных функций $S_m(\omega)$, $S_n(\omega)$, $S_u^*(\omega)$ в выражения (4), (5), (6).

Условия экстремума функционала (1) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial S(\omega)}{\partial S_m(\omega)} = 0, \quad \frac{\partial S(\omega)}{\partial S_n(\omega)} = 0, \quad \frac{\partial S(\omega)}{\partial S_u^*(\omega)} = 0. \quad (7)$$

В силу соотношений (2), (3) равенства (7) представимы в виде

$$\frac{S_n^2(\omega)}{[S_m(\omega) + S_n(\omega) + S_u^*(\omega)]^2} = -\lambda; \quad (8)$$

$$\frac{[S_m(\omega) + S_u^*(\omega)]^2}{[S_m(\omega) + S_n(\omega) + S_u^*(\omega)]^2} = -\mu; \quad (9)$$

$$\frac{S_n^2(\omega)}{[S_m(\omega) + S_n(\omega) + S_u^*(\omega)]^2} = -\nu. \quad (10)$$

Уравнения (8), (9), (10) имеют два решения.

Первое решение.

$$\frac{S_n(\omega)}{S_m(\omega)} = k = \text{const}, \quad k < 1; \quad (11)$$

$$\frac{S_u^*(\omega)}{S_m(\omega)} = l = \text{const}, \quad l < 1. \quad (12)$$

Решению (11), (12) соответствует предельная характеристика

$$\Phi(j\omega) = \frac{1+l}{1+l+k}; \quad (13)$$

соответствующая величина с.к.о. вычисляется по формуле

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{k}{1+k+l} [\sigma_m^2 + \sigma_u^2].$$

Второе решение.

$$S_n(\omega) = \pi \sigma_n^2 \delta(\omega \pm a); \quad (14)$$

$$S_u^*(\omega) = \pi \sigma_u^2 \delta(\omega \pm b). \quad (15)$$

Случай $a=b$. В силу соотношений (14), (15) предельная характеристика запишется в виде

$$\Phi(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \neq \pm a, \\ \frac{\sigma_u^2}{\sigma_n^2 + \sigma_u^2}, & \omega = \pm a; \end{cases} \quad (16)$$

соответствующая величина с.к.о. определяется по формуле

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_u^2 \sigma_n^2}{\sigma_u^2 + \sigma_n^2}.$$

Случай $a \neq b$. Предельная характеристика принимает вид

$$\Phi(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \neq \pm a, \\ 0, & \omega = \pm a. \end{cases} \quad (17)$$

Характеристике (17) соответствует нулевое значение с.к.о.

Передаточные функции (13), (16), (17) удовлетворяют условию Пэли — Винера ⁽⁶⁾

$$\int_0^\infty \frac{\ln |\Phi(j\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty. \quad (18)$$

Таким образом, экстремальные предельные характеристики совпадают с экстремальными характеристиками фильтра Колмогорова — Винера. Этот же вывод может быть сделан в результате исследования функционала (1) после замены величины $S_e(\omega)$ в формуле (2) спектральной плотностью ошибки фильтра Колмогорова — Винера ⁽⁷⁾.

При отсутствии внутренней помехи, т. е. при условии

$$S_u^*(\omega) = 0, \quad (19)$$

спектральная плотность ошибки, вычисляемая по формуле (3), соответствует предельному и шенноновскому фильтрам. Под последним понимается фильтр, получаемый в результате решения задачи Колмогорова — Винера при заданном времени запаздывания, стремящемся к ∞ . Для случая (19) исследование функционала (1) дает соответственно следующие экстремальные характеристики шенноновского и предельного фильтров.

Первое решение.

$$\Phi(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\infty}}{1+k},$$

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{1+k}.$$

Второе решение.

$$\Phi(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\infty}, & \omega \neq \pm a, \\ 0, & \omega = \pm a; \end{cases} \quad (20)$$

$$\Phi(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \neq \pm a, \\ 0, & \omega = \pm a. \end{cases} \quad (21)$$

Передачным функциям (20), (21) соответствует нулевая величина с.к.о.

В силу изложенного выше при условии (19) имеет место следующая Теорема. Если сигнал и помеха на входе фильтра ограничены по мощности величинами (4), (5) и $\sigma_n^2/\sigma_m^2=k$, то среди множества фильтров Колмогорова — Винера, соответствующих идеальному оператору

$$H(p)=e^{-pt_3},$$

экстремальными будут фильтры с передаточными функциями

$$\Phi(j\omega)=\frac{e^{-j\omega t_3}}{1+k}, \quad (22)$$

$$\Phi(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_3}, & \omega \neq \pm a, \\ 0, & \omega = \pm a, \end{cases} \quad (23)$$

где t_3 — заданное время запаздывания.

Характеристики (22), (23) определяются соответственно решениями (11), (14) и обеспечивают при условиях (4), (5) максимальную и минимальную величины с.к.о., из которых последняя имеет нулевое значение.

Аналогичная теорема может быть сформулирована для шенноновского и предельного фильтров, поскольку их характеристики получаются из выражений (22), (23) соответственно при $t_3 \rightarrow \infty$ и $t_3=0$.

Таким образом, первое решение (13) или (22) можно рассматривать как аналог задачи Б. В. Булгакова для случая, когда система находится под действием случайных сигналов и помех. При неполной априорной информации об их статистических характеристиках по ограничениям (4) — (6), наложенным на их мощности, представляется возможным дать верхнюю оценку величины с.к.о.

Второе решение (17) или (23) может быть использовано при разработке принципов создания информационных систем. Реализация экстремальных соотношений (14), (15) во всякой реальной системе невозможна, однако эти соотношения имеют определенный практический смысл, ибо указывают путь целенаправленного изменения спектральных плотностей, обеспечивающий уменьшение ошибки.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
10 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. В. Булгаков, ДАН, т. 51, № 5, 333 (1946). ² Б. В. Булгаков, Прикладная теория гироскопов, ОНТИ, 1938, стр. 355. ³ Ф. А. Михайлов, Анализ точности при случайных воздействиях с неизвестными спектральными характеристиками. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования, кн. 2, гл. V, М., «Машиностроение», 1967, стр. 162. ⁴ Б. Н. Петров, В. В. Петров и др., Итоги науки и техники. Техническая кибернетика, т. 4, М., Изд-во ВИНТИ, 1972, стр. 5. ⁵ В. В. Петров, А. С. Усков, ДАН, т. 210, № 2, 288 (1973). ⁶ Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964, стр. 268. ⁷ Цзянь-Сюэ-Сэнь, Техническая кибернетика, ИЛ, М., 1956, стр. 463.