

А. Т. ХВОСТОВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 I 1975)

В настоящей заметке из формулы Темлякова 2-го рода с помощью метода вариации постоянных устанавливается более общее интегральное представление функций двух комплексных переменных, аналитических в круговых областях с параметрически заданной границей.

Будем исходить из интегрального представления Темлякова для единичного бидиандра $D_0 = \{(|z_1| = 1) \cap (|z_2| < 1)\}$, записав его в виде

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{|\xi_1|=1} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_{|\xi_2|=1} \frac{F(\xi_1, \xi_2) d\xi_2/\xi_2}{\left(1 - \frac{\tau}{\xi_1} z_1 - \frac{1-\tau}{\xi_2} z_2\right)^2}. \quad (1)$$

Применяя формулу (1) к функции вида

$$F(z_1, z_2) = f(R_{11}z_1 + R_{12}z_2, R_{21}z_1 + R_{22}z_2), \quad \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix} \right\| = R,$$

где R — произвольная невырожденная постоянная матрица, будем иметь

$$\begin{aligned} & f(R_{11}z_1 + R_{12}z_2, R_{21}z_1 + R_{22}z_2) = \\ & = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{|\xi_1|=1} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_{|\xi_2|=1} \frac{f(R_{11}\xi_1 + R_{12}\xi_2, R_{21}\xi_1 + R_{22}\xi_2) d\xi_2/\xi_2}{\left(1 - \frac{\tau}{\xi_1} z_1 - \frac{1-\tau}{\xi_2} z_2\right)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, вычислив обратную матрицу $R^{-1} = r = \|r_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, заменим в равенстве (2) z_1 на $r_{11}z_1 + r_{12}z_2$, а z_2 — на $r_{21}z_1 + r_{22}z_2$. Получим интегральное представление функции $f(z_1, z_2)$, аналитической в круговой области $D_0^* = \{(|r_{11}z_1 + r_{12}z_2| < 1) \cap (|r_{21}z_1 + r_{22}z_2| < 1)\}$:

$$\begin{aligned} & f(z_1, z_2) = \\ & = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{|\xi_1|=1} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_{|\xi_2|=1} \frac{f(R_{11}\xi_1 + R_{12}\xi_2, R_{21}\xi_1 + R_{22}\xi_2) d\xi_2/\xi_2}{\left[1 - \frac{\tau}{\xi_1} (r_{11}z_1 + r_{12}z_2) - \frac{1-\tau}{\xi_2} (r_{21}z_1 + r_{22}z_2)\right]^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Формула (3) имеет место при любых невырожденных постоянных матрицах R . Однако можно заметить, что она остается справедливой и при некоторых переменных матрицах. Полагая, например,

$$R = \left\| \begin{matrix} \sqrt{\tau} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\tau} \end{matrix} \right\|,$$

из формулы (3) можно получить интегральное представление Темлякова 2-го рода для гипершара

$$D_1 = \bigcup_{0 < \tau < 1} \{(|z_1| < \sqrt{\tau}) \cap (|z_2| < \sqrt{1-\tau})\}.$$

Выясним, как изменится интегральное представление (3), если R_{ij} считать функциями параметра τ . Пусть область D ограничена поверхностью

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| = R(\tau) \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|, \quad 0 < \tau < 1, \quad |\xi_1| = 1, \quad |\xi_2| = 1,$$

где $R(\tau) = \|R_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, — невырожденная матрица. Тогда для любой функции, аналитической в области D и непрерывной в $\bar{D}$, имеет место формула Лере

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{|\xi_1|=1} d\xi_1 \int_{|\xi_2|=1} d\xi_2 \frac{f(\xi_1, \xi_2) \left[P \frac{\partial (P_1, \xi_1, \xi_2)}{\partial (\tau, \xi_1, \xi_2)} - P_1 \frac{\partial (P_2, \xi_1, \xi_2)}{\partial (\tau, \xi_1, \xi_2)} \right]}{[P_1(\xi_1 - z_1) + P_2(\xi_2 - z_2)]^2}, \quad (4)$$

в которой $P_1 = P_1(\tau, \xi_1, \xi_2)$, $P_2 = P_2(\tau, \xi_1, \xi_2)$ — неопределенные функции. Согласно формуле (3), положим

$$P_1 = \frac{\tau}{\xi_1} r_{11} + \frac{1-\tau}{\xi_2} r_{21}, \quad P_2 = \frac{\tau}{\xi_1} r_{12} + \frac{1-\tau}{\xi_2} r_{22}, \quad (5)$$

где $r(\tau) = \|r_{ij}\| = R^{-1}$. Производи непосредственные вычисления. Будем иметь, что формула (3) принимает вид

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{|\xi_1|=1} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \times \\ \times \int_{|\xi_2|=1} \frac{f(\xi_1, \xi_2) \left[1 + \tau(r_{11}R_{12}' + r_{12}R_{22}') \frac{\xi_2}{\xi_1} - (1-\tau)(r_{21}R_{11}' + r_{22}R_{21}') \frac{\xi_1}{\xi_2} \right] \frac{d\xi_2}{\xi_2}}{\left[1 - \left(\frac{\tau}{\xi_1} r_{11} + \frac{1-\tau}{\xi_2} r_{21} \right) z_1 - \left(\frac{\tau}{\xi_1} r_{12} + \frac{1-\tau}{\xi_2} r_{22} \right) z_2 \right]^2}. \quad (6)$$

Остается выяснить, в каких случаях формула Лере допускает P_1 и P_2 , определенные по формулам (5). Из доказательства Ганса Леви видно, что формула (4) будет иметь место во всех случаях, когда можно применять формулу Стокса, т. е. когда знаменатель ядра не может обращаться в нуль при $(z_1, z_2) \in D$, $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in \{0 < \tau < 1, |\xi_1| = 1, |\xi_2| = 1\}$. Исходя из этого, потребуем, чтобы граница ∂D при всех τ была расположена внутри областей $\bar{D}_\tau = \{\tau | r_{11}(\tau) z_1 + r_{12}(\tau) z_2 | + (1-\tau) | r_{21}(\tau) z_1 + r_{22}(\tau) z_2 | \leq 1\}$, а функция

$$\varphi(x) = \tau |r_{11}(\tau) \xi_1 + r_{12}(\tau) \xi_2| + (1-\tau) |r_{21}(\tau) \xi_1 + r_{22}(\tau) \xi_2|,$$

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| = R(x) \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|, \quad 0 < x < 1, \quad |\xi_1| = 1, \quad |\xi_2| = 1,$$

при $x = \tau$ тождественно по ξ_1 и ξ_2 имела максимум. Это условие будет выполнено, если

$$\varphi'(x) |_{x=\tau} = 0; \quad (7)$$

$$\varphi''(x) |_{x=\tau} < 0. \quad (8)$$

Произведем исследование полученных соотношений. Обозначим

$$r(\tau)R(x) = \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\|, \quad r(\tau)R'(\tau) = \|A_{ij}\| = A, \quad r(\tau)R''(\tau) = \|B_{ij}\| = B. \quad (9)$$

Будем иметь

$$\varphi(x) = \tau |\alpha \xi_1 + \beta \xi_2| + (1-\tau) |\gamma \xi_1 + \delta \xi_2|,$$

$$\varphi'(x) = \frac{\tau}{2|\alpha \xi_1 + \beta \xi_2|} [(\alpha_x' \xi_1 + \beta_x' \xi_2)(\bar{\alpha} \xi_1^{-1} + \bar{\beta} \xi_2^{-1}) +$$

$$+(\alpha \xi_1 + \beta \xi_2)(\bar{\alpha}_x' \xi_1^{-1} + \bar{\beta}_x' \xi_2^{-1})] + \frac{1-\tau}{2|\gamma \xi_1 + \delta \xi_2|} [(\gamma_x' \xi_1 + \delta_x' \xi_2)(\bar{\gamma} \xi_1^{-1} + \bar{\delta} \xi_2^{-1}) + \\ + (\gamma \xi_1 + \delta \xi_2)(\bar{\gamma}_x' \xi_1^{-1} + \bar{\delta}_x' \xi_2^{-1})].$$

Полагая $x=\tau$ и учитывая обозначения (9), легко установить, что тождественно по ξ_1 и ξ_2 должно иметь место равенство

$$\frac{\tau}{2} [(A_{11} \xi_1 + A_{12} \xi_2) \xi_1^{-1} + (\bar{A}_{11} \xi_1^{-1} + \bar{A}_{12} \xi_2^{-1}) \xi_1] + \\ + \frac{1-\tau}{2} [(A_{21} \xi_1 + A_{22} \xi_2) \xi_2^{-1} + (\bar{A}_{21} \xi_1^{-1} + \bar{A}_{22} \xi_2^{-1}) \xi_2] = 0.$$

Отсюда следует, что элементы матрицы A удовлетворяют соотношениям

$$\tau \operatorname{Re} A_{11} + (1-\tau) \operatorname{Re} A_{22} = 0, \quad \tau A_{12} + (1-\tau) \bar{A}_{21} = 0. \quad (10)$$

Аналогично производится исследование неравенства (8). Учитывая обозначения (7) и равенства (10), можно доказать, что тождественно по ξ_1 и ξ_2 оно может выполняться только при $|A_{12}| \leq 1/(2\tau)$ и в этом случае приводится к виду

$$\operatorname{Re} A_{11} (1 - \tau \operatorname{Re} A_{11}) > |A_{12}| \left(1 - \frac{\tau}{2} |A_{12}| \right). \quad (11)$$

Объединяя интегральную формулу (6), обозначения (9) и соотношения (10), (11), получим следующее утверждение.

Теорема 1. Если элементы матрицы $A = A(\tau) = \|A_{ij}\|$ связаны соотношением

$$|A_{12}| \leq 1/(2\tau),$$

$$\operatorname{Re} A_{11} (1 - \tau \operatorname{Re} A_{11}) > |A_{12}| \left(1 - \frac{\tau}{2} |A_{12}| \right),$$

$$\tau \operatorname{Re} A_{11} + (1-\tau) \operatorname{Re} A_{22} = 0, \quad \tau A_{12} + (1-\tau) \bar{A}_{21} = 0 \quad (12)$$

и невырожденные матрицы

$$R = R(\tau) = \|R_{ij}\|, \quad r = r(\tau) = \|r_{ij}\|$$

определены из равенств

$$R' = RA, \quad r = R^{-1}, \quad (13)$$

то для любой функции $f(z_1, z_2)$, аналитической в области

$$D = \bigcap_{0 < \tau < 1} \{ \tau |r_{11} z_1 + r_{12} z_2| + (1-\tau) |r_{12} z_1 + r_{22} z_2| < 1 \}$$

и непрерывной в $\bar{D}$, имеет место интегральное представление

$$f(z_1, z_2) = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{|\xi_1|=1} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_{|\xi_2|=1} \frac{f(\xi_1, \xi_2) [1 + \tau A_{12} \xi_2 / \xi_1 - (1-\tau) A_{21} \xi_1 / \xi_2] d\xi_2 / \xi_2}{\left[1 - \left(\frac{\tau}{\xi_1} r_{11} + \frac{1-\tau}{\xi_2} r_{21} \right) z_1 - \left(\frac{\tau}{\xi_1} r_{12} + \frac{1-\tau}{\xi_2} r_{22} \right) z_2 \right]^2}, \quad (14)$$

$$\left\| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right\| = R(\tau) \left\| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right\|.$$

Сформулируем основные свойства интегрального представления (14), вытекающие из теории систем линейных однородных дифференциальных уравнений и теоремы 1. При этом будем обозначать K класс матриц R , удовлетворяющих условиям теоремы 1, а K_A — сечение этого класса, соответствующее выбранной матрице A .

Свойство 1. Если элементы матрицы A удовлетворяют соотношениям (12) и непрерывны в интервале $0 < \tau < 1$, то, каковы бы ни были на-

$$R_{ij}(\tau_0) = R_{ij}^{(0)}, \quad i, j = 1, 2, \quad (15)$$

существует единственная невырожденная матрица $R \in K_A$, удовлетворяющая заданным начальным условиям.

Свойство 2. Если элементы матрицы A удовлетворяют условиям (12) и имеют непрерывные производные до m -го порядка включительно, то элементы всех матриц $R \in K_A$ имеют непрерывные производные до $(m+1)$ -го порядка включительно.

Свойство 3. Если матрица A удовлетворяет условиям (12), R принадлежит K_A и $C = \|C_{ij}\|$ — невырожденная постоянная матрица, то CR тоже принадлежит K_A . Таким образом, сечение K_A является замкнутым относительно левосторонних линейных преобразований.

Свойство 4. Если матрица $A = \|A_{ij}\|$ удовлетворяет условиям (12) и $R = \|R_{ij}\| \in K_A$, то матрица $\bar{A} = \|\bar{A}_{ij}\|$ тоже удовлетворяет условиям (12) и $\bar{R} = \|\bar{R}_{ij}\| \in K_{\bar{A}}$.

Свойство 5. Если $R \in K$, $S = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_1} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_2} \end{pmatrix}$, $\gamma_1 = \gamma_1(\tau)$, $\gamma_2 = \gamma_2(\tau)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые действительные функции, то $RS \in K$.

Приведем пример получения интегрального представления (14) для круговой области. Выберем матрицу A , удовлетворяющую условиям (12); пусть, например, $A = \begin{pmatrix} 1/\tau(1-\tau) & 0 \\ 0 & -1/(1-\tau)^2 \end{pmatrix}$. Составим систему $R' = -RA$, находим невырожденную матрицу $R \in K_A$ и вычисляем обратную матрицу r :

$$\begin{aligned} R_{11}' &= \frac{1}{\tau(1+\tau)} R_{11}, & R_{12}' &= -\frac{1}{1-\tau^2} R_{12}, \\ R_{21}' &= \frac{1}{\tau(1+\tau)} R_{21}, & R_{22}' &= -\frac{1}{1-\tau^2} R_{22}, \end{aligned}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{1+\tau} & -\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \\ \frac{\tau}{1+\tau} & \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \end{pmatrix}, \quad r = R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\tau}{2\tau} & \frac{1+\tau}{2\tau} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \end{pmatrix}.$$

Обращаясь теперь к системе 1, получаем, что если круговая область D ограничена поверхностью

$$\xi_1 = \frac{\tau}{1+\tau} \xi_1 - \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \xi_2, \quad \xi_2 = \frac{\tau}{1+\tau} \xi_1 + \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \xi_2,$$

то для любой функции $f(z_1, z_2)$, аналитической в области D и непрерывной в $\bar{D}$, имеет место интегральное представление

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 d\tau \int_{|\xi_1|=1} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_{|\xi_2|=1} \frac{f(\xi_1, \xi_2) d\xi_2/\xi_2}{\left[1 - \left(\frac{1+\tau}{2\xi_1} - \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{2\xi_2} \right) z_1 - \left(\frac{1+\tau}{2\xi_1} + \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{2\xi_2} \right) z_2 \right]^2}. \end{aligned}$$

Магаданский государственный педагогический институт

Поступило
2 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Темляков, ДАН, т. 120, № 5 (1958). ² А. А. Темляков, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, т. 96, 6 (1960). ³ Ж. Лере, Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, ИЛ, М., 1970.