

А. А. ШАРОМЕТ

АБСТРАКТНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 I 1975)

Исследованию автоморфизмов классических групп посвящено очень много работ; обзор основных из них содержится в книге Дьедонне ⁽¹⁾, в определенной степени завершающей «геометрический период» в теории классических групп. В последние годы в этой теории произошел важный идейный сдвиг, вызванный вторжением в эту область теории алгебраических групп. Это привело не только к существенному расширению результатов, но и к более широкой и содержательной постановке самого вопроса: какова природа абстрактных изоморфизмов

$$\varphi: G(k) \rightarrow H(k'),$$

групп рациональных точек связных алгебраических групп G и H , определенных над бесконечными полями k и k' соответственно (см. ⁽¹⁾).

В настоящей работе этот вопрос рассматривается для случая, когда G и H — связные разрешимые группы. Устанавливаются условия, при которых существуют изоморфизм $\sigma: k' \rightarrow k$, группа F и изогении $\pi_1: F \rightarrow G$ и $\pi_2: F \rightarrow {}^\sigma H$, определенные над k , такие, что

$$\sigma_0(\varphi(\pi_1(f))) = \pi_2(f)\theta(f)$$

для всякого $f \in F(k)$, где $\theta: F(k) \rightarrow Z({}^\sigma H(k))$ — подходящий гомоморфизм, а $\sigma_0: H(k') \rightarrow {}^\sigma H(k)$ — естественный изоморфизм, индуцированный σ (см. теоремы 1 и 2). В теореме 3 доказывается, что если к этим условиям добавить конечно-порожденность поля k , то найдется бирациональный изоморфизм $\tilde{\varphi}: G \rightarrow {}^\sigma H$ такой, что $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g)\theta(g)$ для всех $g \in G(k)$ и подходящего гомоморфизма $\theta: F(k) \rightarrow Z({}^\sigma H(k))$.

Для связной разрешимой группы G (соответственно H) и ее максимального тора T (соответственно T') будем обозначать через $\Phi(T, G)$ (соответственно $\Phi(T', H)$) множество ненулевых корней группы G (H) относительно тора T (T'), U_G — унипотентную часть группы G , в ${}^T U_G$ — унипотентную часть централизатора тора T . Пусть $X^*(T)$ — группа характеров тора T . Множество характеров $\Phi \subset X^*(T)$ будем называть неприводимым, если векторное пространство $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi$ нельзя разбить в прямую сумму подпространств V_i , $1 \leq i \leq n$, так, чтобы $\Phi = \bigcup_{i=1}^n (V_i \cap \Phi)$. В этих обозначениях верна

Теорема 1. Пусть G и H — связные разрешимые группы, определенные и триангулируемые над полями k и k' соответственно, центры которых конечны. Пусть множество $\Phi(T, G)$ неприводимо, все корни из $\Phi(T, G)$ и $\Phi(T', H)$ являются сепарабельными отображениями и ${}^T U_G = \{e\}$, ${}^{T'} U_H = \{e\}$.

Тогда, если $\varphi: G(k) \rightarrow H(k')$ — изоморфизм групп, то найдутся изоморфизм $\sigma: k' \rightarrow k$, алгебраическая группа F и изогении $\pi_1: F \rightarrow G$ и $\pi_2: F \rightarrow {}^\sigma H$, определенные над k , такие, что

$$\sigma_0(\varphi(\pi_1(f))) = \pi_2(f)\theta(f)$$

для подходящего гомоморфизма $\theta: F(k) \rightarrow Z({}^\sigma H(k))$.

Следующие примеры показывают, что условия, наложенные на G и H в теореме 1, существенны.

Пример 1. Если поле k имеет бесконечную размерность над своим простым подполем, то аддитивные группы любых конечномерных векторных пространств изоморфны.

Пример 2. Пусть $k=R$ — поле вещественных чисел и $G(R)=R^*\cdot R^+$ — полупрямое произведение мультипликативной и аддитивной групп поля R , где действие R^* на R^+ задается формулой $'d=t^3d$. В $H(R)=R^*\cdot R^+$ действие задается формулой $'d=t^5d$. Отображение $\varphi: (t, d) \mapsto (t^{5/3}, d)$ является изоморфизмом групп $G(R)$ и $H(R)$. Однако не существует изоморфизма G на H или H на G .

Пример 3. Пусть k — несовершенное поле, $G(k)=k^*\cdot V^+$ — полупрямое произведение k^* на аддитивную группу конечномерного векторного пространства V , где действие k^* на V^+ задается формулой $'v=t^q v$; в $H(k)=k^*\cdot W^+$ действие задается формулой $'w=t^r w$ (q и r — степени характеристики поля). V и W можно рассматривать как векторные пространства над k^q и k^r соответственно. Пусть $\dim_{k^q} V = \dim_{k^r} W$ и $q < r$. Тогда V и W , рассматриваемые как пространства над k^q и k^r соответственно, λ -изоморфны, где $\lambda: k^q \rightarrow k^r$ ($\lambda: x \mapsto x^{q/r}$) — изоморфизм полей. Обозначим этот λ -изоморфизм через ψ . Тогда отображение $\varphi: (t, v) \mapsto (t, \psi(v))$ осуществляет изоморфизм групп $G(k)$ и $H(k)$, но группы G и H по построению имеют различную размерность.

Пример 4. Пусть поле K содержит два подполя k и k' такие, что $|K:k| \neq |K:k'|$ и K — конечное сепарабельное расширение k и k' . Пусть N — связная разрешимая группа, определенная над K . Тогда группы $G=R_K \cdot N$ и $H=R_{K'} \cdot N$, полученные из N ограничением основного поля с K до k и k' соответственно, имеют различную размерность; однако существует изоморфизм $\varphi: G(k) \rightarrow H(k')$, поскольку обе группы изоморфны $N(K)$.

Пример 5. Пусть $G=G_1 \times G_2$ — прямое произведение разрешимых k -групп, а ν и τ — различные автоморфизмы поля k . Тогда отображение

$$(g_1, g_2) \mapsto (\nu_0(g_1), \tau_0(g_2)),$$

где $g_1 \in G_1(k)$, а $g_2 \in G_2(k)$ является автоморфизмом группы $G(k)$, для которого невозможно найти автоморфизм σ , требуемый в теореме 1.

В процессе доказательства теоремы 1 устанавливается биекция между $\Phi(T, G)$ и $\Phi(T', H)$ ($\chi_i \mapsto \psi_i$) и для каждого i строится изоморфизм полей $\sigma_i: k' \rightarrow k$, продолжающий отображение $\chi_i \cdot \varphi^{-1} \cdot \psi_i^{-1}$, определенное на $\psi_i(T'(k'))$. Из неприводимости $\Phi(T, G)$ следует, что все σ_i совпадают; обозначим этот изоморфизм через σ . Далее, индукцией по степени nil-потентности доказывается, что $\sigma_0 \cdot \varphi|_{U_G(k)}$ — бирациональный изоморфизм. При этом мы существенно пользуемся результатами ⁽²⁾. Таким образом, теорема 1 вытекает из следующей теоремы, которая представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 2. Пусть G и H — разрешимые связанные k -группы, центры которых конечны и не содержат унипотентных элементов. Пусть $\varphi: G(k) \rightarrow H(k)$ — изоморфизм такой, что $\varphi|_{U_G(k)}$ бирационально.

Тогда найдутся группа F и изоморфизм $\pi_1: F \rightarrow G$ и $\pi_2: F \rightarrow H$, определенные над k , такие, что $\varphi(\pi_1(f)) = \pi_2(f)\theta(f)$ для всех $f \in F(k)$, где $\theta: F(k) \rightarrow Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Доказательство теоремы 2 напоминает в идейном плане доказательство основной теоремы в ⁽³⁾.

Замечание. Если в условиях теоремы 2 естественное отображение $T' \rightarrow \text{Aut } U_H$ является бирациональным изоморфизмом максимального тора T' на его образ, то можно считать, что $F=G$ и $\pi_1 = \text{id}$. Иными словами, существует изоморфизм $\pi: G \rightarrow H$ такая, что $\varphi(g) = \pi(g)\theta(g)$ для всех $g \in G(k)$, где $\theta: G(k) \rightarrow Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Интересно отметить, что если в условиях теоремы 2 считать поле k конечно-порожденным, то группы G и H оказываются изоморфными; точнее, верна следующая

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 2 поле k конечно-порождено. Тогда существует k -изоморфизм $\tilde{\varphi}: G \rightarrow H$ такой, что

$$\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g)\theta(g)$$

для всех $g \in G(k)$, где $\theta: G(k) \rightarrow Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Для максимального k -тора T в G найдется локально-компактное пополнение k_v поля k , над которым тор T разлагается. Тогда для тора T и k_v верна теорема о слабой аппроксимации (см. ⁽³⁾). Утверждение теоремы получается из того, что если в k_v для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняется $k_v^m = k_v^n$, то $m = \pm n$, из расщепимости тора T над k_v и из теоремы о слабой аппроксимации.

Автор благодарен акад. АН БССР В. П. Платонову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
17 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Borel, J. Tits, Ann. Math., v. 97, № 3, 499 (1973). ² A. Borel, T. Springer, Tôhoku Math. J., v. 20, 443 (1968). ³ G. Harder, Arch. Math., B. 19, № 5 (1956).
⁴ Ж. Дрёдонне, Геометрия классических групп, М., «Мир», 1974. ⁵ В. П. Платонов, М. В. Милованов, ДАН, т. 209, № 1, 43 (1973).