

С. Ю. ЖОЛКОВ, А. С. ТАНГЯН

НЕКОТОРЫЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 I 1975)

В статье рассматривается круг проблем, связанный с соотношениями между такими кардинальными инвариантами топологических пространств и их произведений, как наследственная плотность, наследственное число Суслина, мощность топологии. В частности, без всяких теоретико-множественных предположений решается вопрос о совпадении первых двух, если накладывать условия на квадрат пространства. Архангельским в предположении аксиомы Мартина (АМ) доказано, что для бикompакта наследственное число Суслина совпадает с наследственной плотностью ⁽¹⁾, а в отрицании совместимой с АМ гипотезы Суслина построен пример совершенно-нормального несепарабельного бикompакта — континуума Суслина ^(2, 3), т. е. проблема равенства наследственного числа Суслина и наследственной плотности является проблемой, и проблемой довольно трансцендентной.

Через $l(X)$, $s(X)$, $c(X)$, $t(X)$ обозначаются соответственно число Линделёфа, плотность, число Суслина, теснота пространства, через $\text{Тор } X$ — его топология, а $\psi(H, X)$ — псевдохарактер подпространства H в X . Если $\tau(X)$ — некоторая кардинальнозначная функция, определенная на любом подпространстве $Y \subset X$, то через $h\tau(X) = \sup \{\tau(Y) : Y \subset X\}$ обозначаем соответствующую наследственную функцию.

Все рассматриваемые в статье пространства предполагаются хаусдорфовыми.

Определение 1. Псевдобаза $\Psi(x)$ в точке $x \in X$ называется правильной, если $\bigcap \{[O] : O \in \Psi(x)\} = \{x\}$ и для любого конечного $\Psi' \subset \Psi(x)$ существует $O_{\Psi'} \in \Psi(x)$ такое, что $O_{\Psi'} \subset \bigcap \{O : O \in \Psi'\}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство подмножеств пространства X . Семейство Ψ называется полным относительно семейства $\mathfrak{A}$ в точке $x \in X$, если для любого $O \in \Psi$ из того, что $\mathfrak{A}_x(O) = \{U \in \mathfrak{A} : x \in U \subset O\} \neq \emptyset$ следует $\mathfrak{A}_x(O) \cap \Psi = \emptyset$. Скажем, что семейство Ψ полно в точке x относительно системы Σ семейств подмножеств X , если оно полно относительно каждого $\mathfrak{A} \in \Sigma$.

Определение 3. Система Σ семейств открытых в X множеств называется a -системой, если любая правильная псевдобаза $\Psi(x)$ произвольной точки $x \in X$, полная относительно Σ , является базой в точке x .

Определение 4. X назовем a -пространством, если в нем существует a -система мощности τ . Если $\tau = \aleph_0$, говорим a -пространство.

В ⁽⁴⁾ получены следующие результаты об a -пространствах (там они называются сильно-аддиционными):

1. Пространство X является аддиционным тогда и только тогда, когда в X существует a -система, мощность которой не превосходит сетевого веса X .

2. a -Пространствами являются: а) локально-бикompактные, б) линейно-упорядоченные, в) локально-связные периферические бикompактные, г) перистые и, следовательно, полные по Чеху пространства.

3. a -Пространствами являются A -множества бикompактов. Открытое подмножество a -пространства есть a -пространство, следовательно, всякое

подпространство совершенно-нормального a -пространства будет a -пространством.

4. Произведение a -пространств в любом числе есть a -пространство.

Легко доказать, что произведение определенных в настоящей работе a_t -пространств в любом числе есть a_t -пространство.

Из всего сказанного видно, что класс a_t -пространств широк и весьма.

Определение 5. Для $Y \subset X$ обозначим $\Psi(Y/X) = \{O - \text{открытых в } X: \{O \in \Psi(Y/X): y \in O\} \text{ является псевдобазой любой точки } y \in Y\}$, $\psi w(Y/X) = \inf |\Psi(Y/X)|$ — псевдовес Y в X , $W(Y/X) = \{U \text{ открытых в } X, \text{ образующих базу } Y\}$, $w(Y/X) = \inf |W(Y/X)|$ — вес Y в X .

Теорема 1. Пусть X есть регулярное a_t -пространство, $\psi w(Y/X) \leq \tau$, $hl(X) \leq \tau$.

Тогда $w(Y/X) \leq \tau$.

Доказательство. Пусть Σ есть a -система мощности τ . Рассмотрим $\Psi(Y/X)$ мощности τ . Каждое $O \in \Psi(Y/X)$ покроем τ открытыми в X множествами, содержащимися в O с замыканиями, и включим их в $\Psi(Y/X)$. Далее, для каждого $\mathfrak{A} \in \Sigma$ и любого $O \in \Psi(Y/X)$ рассмотрим $\mathfrak{A}(O) = \{U \in \mathfrak{A}: U \subset O\}$ и выберем $\mathfrak{A}'(O) \subset \mathfrak{A}(O)$ такое, что $|\mathfrak{A}'(O)| \leq \tau$ и $\bigcup \{U: U \in \mathfrak{A}'(O)\} = \bigcup \{U: U \in \mathfrak{A}(O)\}$. К $\Psi(Y/X)$ присоединим элементы $\mathfrak{A}'(O)$ и пополним $\Psi(Y/X)$ конечными пересечениями. Прделав всю описанную выше процедуру до шага ω_0 , получим полную в каждой точке систему правильных псевдобаз $\Psi(Y/X)$ мощности $\leq \tau$ и, следовательно, базу Y искомого пространства.

Следствие 1. В регулярном a -пространстве $w(Y/X) \leq \psi w(Y/X) \cdot hl(X)$.

Следствие 2. Регулярное линделефово пространство X такое, что $\psi w(X) \leq \aleph_0$ метризуемо, поскольку обладает счетным весом.

Определение 6. Система $\gamma = \{\gamma_\alpha: \alpha \in A\}$ покрытий пространства X называется псевдоизмельчающейся, если $\bigcap \{\gamma_\alpha(x): \alpha \in A\} = \{x\}$, где $\gamma_\alpha(x)$ — звезда покрытия γ_α в точке x .

Лемма 1. В любом хаусдорфовом пространстве X существует псевдоизмельчающаяся система $\gamma = \{\gamma_\alpha: \alpha \in A\}$ мощности $\leq \psi(\Delta, X^2)$, где $\Delta = \{(x, x) \in X^2\}$ — диагональ.

Лемма 2. Пусть X регулярно, $\psi(\Delta, X^2) > hc(X^2)$. Тогда существуют $L \subset X^2$ и $S \subset X^2$, такие, что $\Delta \subset L$, $\psi(L, X^2) \leq hc(X^2)$, $|S| \leq hc(X^2)$ и $L \setminus \Delta \subset [S]$.

Доказательство. Пусть $p \in X^2 \setminus \Delta = \nabla$. Возьмем покрытие $\nabla: \omega = \{U(p) \text{ открытых в } X^2: p \in \nabla \text{ и } [U(p)] \cap \Delta = \emptyset\}$. По предложению 1 из ⁽⁵⁾, существуют $\omega' \subset \omega$ и $S \subset X^2 \setminus \Delta$ такие, что $|\omega'| \leq hc(X^2)$, $|S| \leq hc(X^2)$ и $\nabla \setminus \bigcup \{U: U \in \omega'\} \subset [S]$. Тогда $L = X^2 \setminus \bigcup \{U: U \in \omega'\}$ — искомое.

Теорема 2. Регулярное $X = X_1 \cup X_2$, где в открытом X_1 существует псевдоизмельчающаяся система $\gamma = \{\gamma_\alpha: \alpha \in A\}$, $|\gamma| \leq hc(X^2)$, а $s(X_2) \leq hc(X^2)$.

Доказательство. Раз $\psi(\Delta, X^2) \leq hc(X^2)$, то по лемме 1 существует псевдоизмельчающаяся система мощности $\leq hc(X^2)$. Если $\psi(\Delta, X^2) > hc(X^2)$, то найдем L и S в условиях леммы 2 и положим $\Theta = \Delta \setminus [S] = L \setminus [S] = L \cap (X^2 \setminus [S])$. Тогда $\psi(\Theta, X^2) \leq hc(X^2)$. Положим, $X_1 = \pi\Theta$, где $\pi: X \times X \rightarrow X$ — проекция. Так как Θ — диагональ в $X_1 \times X_1$, то по лемме 2 в X_1 существует псевдоизмельчающаяся система $\gamma = \{\gamma_\alpha: \alpha \in A\}$, $|\gamma| \leq hc(X^2)$. Положим $X_2 = \pi([S])$ и тогда $X_1 \cup X_2 = X$, $s(X_2) \leq |\pi S| \leq hc(X^2)$. В заключение заметим, что поскольку Θ открыто в Δ и π — открытое отображение, то X_1 открыто в X и любое γ_α состоит из открытых в X множеств.

Лемма 3. Пусть $hl(X) > \tau$, $hs(Y) > \tau$, тогда $hc(X \times Y) > \tau$.

Доказательство. 1) Так как $hl(X) > \tau$, то найдется $A = \{x_\lambda: \lambda \in \Lambda\} \subset X$, обладающее следующим свойством:

(AL) Для любой $x_\lambda \in A$ существует $O(x_\lambda)$, открытое в A , такое, что $O(x_\lambda) \cap \{x_\beta: \beta > \lambda\} = \emptyset$.

Такое пространство по аналогии со стрелкой Зоргенфрея ⁽⁶⁾ мы бу-

дем называть левой стрелкой. $|\cdot A| = \tau^+$, так что $A = AL(\tau^+)$ — левая стрелка длины τ^+ .

2) Так как $hs(Y) > \tau$, то найдется $A = \{y_\lambda: \lambda \in \Lambda\} \subset X$, обладающее следующим свойством:

(AR) Для любой $y_\lambda \in A$ существует $V(y_\lambda)$, открытое в A , такое, что $V(y_\lambda) \cap \{y_\beta: \beta < \lambda\} = \emptyset$.

$A_* = AR(\tau^+)$ — правая стрелка длины τ^+ , причем можем считать, что как $\cdot A$, так и A_* упорядочены по типу минимального ординала мощности τ^+ . $\cdot A$ и A_* наделены различной топологией, но равны как вполне упорядоченные множества. Следовательно, можем рассмотреть диагональ $\Delta \subset \cdot A \times A_* \subset X \times Y$, которая дискретна $|\Delta| = \tau^+$. Следовательно $hc(X \times Y) > \tau$.

Следствие. Если $hc(X^2) \leq \tau$, то либо $hl(X) \leq \tau$, либо $hs(X) \leq \tau$.

Теорема 3. Пусть X — регулярное a_τ -пространство, $hc(X^2) \leq \tau$. Тогда $hs(X) \leq \tau$.

Доказательство. Предположим $hs(X) > \tau$, тогда $hl(X) < \tau$. Возьмем любое $Y \subset X$. По теореме 2, $Y = Y_1 \cup Y_2$, $s(Y_2) \leq \tau$, а Y_1 обладает псевдоизмельчающейся системой $\gamma = \{\gamma_\alpha: \alpha \in A\}$ покрытий из открытых в Y множеств, $|\gamma| \leq \tau$. Так как $hl(X) \leq \tau$, то можно считать, что $|\gamma_\alpha| \leq \tau$ для любого $\gamma_\alpha \in \gamma$ и, следовательно, $\psi w(Y_1/Y) \leq \tau$. По теореме 1, $w(Y_1/Y) \leq \tau$, откуда $s(Y_1) \leq \tau$ и, следовательно, $s(Y) \leq \tau$ для любого $Y \subset X$, т. е. $hs(X) \leq \tau$.

Следствие 1. В регулярном a -пространстве X всегда $hs(X) \leq hc(X^2)$.

Следствие 2. Теорема верна для любого кардинального числа $\tau \geq \aleph_0$, если пространство принадлежит одному из следующих классов ⁽⁴⁾: локальные бикомпакты, линейно-упорядоченные, перистые и квазиперистые пространства, локально-связные периферические бикомпакты.

То же верно для следующих теорем.

Теорема 4. В регулярном локальном a_τ -пространстве X (т. е. в таком, что у каждой точки есть окрестность, являющаяся a_τ -пространством), если $hc(X^2) \leq \tau$, то $hs(X) \leq \tau$.

Доказательство. Если $hs(X) > \tau$, то по лемме 3 $hl(X) \leq \tau$. Выбрав из покрытия X окрестностями, являющимися a_τ -пространствами, подпокрытие мощности τ и применив теорему 3, получим, что $hs(X) \leq \tau$.

Теорема 5 (о совпадении). В регулярном a -пространстве X^λ всегда $hs(X^\lambda) = hc(X^\lambda)$, где $\lambda \geq \aleph_0$.

Доказательство. Применяем теорему 3 к a -пространству $X^\lambda = X^{2^\lambda}$.

Замечание. Теорема верна для a_τ -пространств при $\lambda \geq \tau$.

Добавляя некоторые предположения, которые, как следует из примеров, являются необходимыми, теореме о совпадении можно доказать и для конечных степеней пространства X . Предварительно напомним, что справедлива

Лемма 4. В предположении гипотезы Лузина LH ($2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$) наследственно-нормальное сепарабельное пространство наследственно-коллективно-нормально ⁽⁷⁾.

Факт, верный, кстати, на любых кардиналах.

Теорема 6 (LH). Если a -пространство X наследственно нормально в любой натуральной степени, то $hc(X^n) = hs(X^n) = hc(X^2)$ для любого натурального числа n .

Доказательство. Из следствия после теоремы 3 вытекает, что $s(X) \leq hc(X^2)$, поэтому $s(X^{2^n}) \leq hc(X^2)$ или любом натуральном n , применим лемму 4 к X^{2^n} и, воспользовавшись тем же следствием из теоремы 3, получим желаемое.

Следствие. В условиях теоремы 6 $t(X^n) \leq hc(X^2)$.

Теорема 7. Пусть $Y^\lambda = X$ есть регулярное a -пространство. Тогда:

1) если $\lambda \geq \aleph_0$, то $hc(X) = hs(X)$;

2) (LH) если $2 \leq \lambda < \aleph_0$, а X^2 наследственно нормально, то $hc(X) = hs(X)$.

Вообще говоря, нельзя утверждать, что наследственное число Суслина не возрастает на натуральных степенях пространства X . Е. Michael приводит для любого натурального n пример пространства, регулярного и наследственно финально-компактного в n степени, но в $(n+1)$ -й даже не нормального ⁽⁸⁾. Таким образом, предположения теоремы 6 необходимы, и в этом смысле полученный результат является окончательным.

В связи с этой проблематикой представляет интерес проследить поведение в произведениях такого кардинального инварианта, как мощность топологии.

Лемма 5 (ЛН). Если $|\text{Тор } X| \leq 2^{\aleph_0}$, то $hc(X) \leq \aleph_0$.

Доказательство. Поскольку $2^{c(X)} \leq |\text{Тор } Y| \leq |\text{Тор } X|$ для любого $Y \subset X$, то из ЛН следует, что $c(Y) \leq \aleph_0$.

Следствие (ЛН). Регулярное α -пространство является наследственно сепарабельным, если мощность топологии не превосходит $2^{\aleph_0}$.

Отрицательный ответ на вопрос, верно ли то же самое для X^n , дает «двойная стрелка», являющаяся даже совершенно-нормальным бикомпактом ⁽⁹⁾. Однако при дополнительных предположениях ответ на поставленный вопрос оказывается положительным.

Теорема 8 (ЛН). Пусть X есть α -пространство, $hc(X^2) \leq \aleph_{\alpha}$, $|X| \leq 2^{\aleph_0}$, X^{2^n} наследственно нормально, тогда $|\text{Тор } X^n| = |\text{Тор } X| \leq 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Следует из того, что $|\text{Тор } X| \leq |X|^{hc(X)}$.

Следствие. Если X есть α -пространство такое, что $hc(X^2) \leq \aleph_0$ и $\psi(x, X) \leq \aleph_0$, где $\psi(x, X)$ обозначает псевдохарактер любой точки пространства X , причем X^{2^n} наследственно нормально, то $|\text{Тор } X^n| = |\text{Тор } X| = 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Из ⁽¹⁰⁾ следует, что $|X| \leq 2^{\aleph_0}$; применяем теорему 8.

Принимая обобщенную гипотезу Лузина о монотонности кардинальной экспоненты $2^{\aleph_{\alpha+1}} > 2^{\aleph_{\alpha}}$, можно теоремы 6—8 со счетного кардинала обобщить на любые.

В заключение авторы хотели бы поблагодарить проф. В. И. Пономарева за содействие в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, ДАН, т. 199, № 6 (1971).
- ² Т. Йек, Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.
- ³ S. Tennenbaum, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 59, № 1 (1968).
- ⁴ Б. Э. Шапировский, Системы семейств открытых множеств и свойства пространств. Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям, Кишинев, 1973.
- ⁵ Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 202, № 4 (1972).
- ⁶ R. Sorgenfrey, Bull. Am. Math. Soc., v. 53, (1947).
- ⁷ E. Michael, Composito Math., v. 23, № 2 (1971).
- ⁸ Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 207, № 4 (1972).
- ⁹ П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, М., «Наука», 1971.
- ¹⁰ A. Hajnal, I. Juhász, Ann. Univ. Soc. Budapest, Eötvös Sect. Math., v. 11 (1968).