

М. А. ЗАДОЯН

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ НЕПОЛНОГО ТОРА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 11 III 1975)

Рассматривается задача напряженного состояния стержня из несжимаемого упрочняющегося материала с круговой осью и постоянным поперечным сечением, находящегося под совместным воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR , приложенных на торцевых сечениях (рис. 1). Подобное напряженное состояние возникает в пружине с малым шагом при ее центральном сжатии. Такая задача для упругого материала ранее рассматривалась в работах (1-4) и др. Для случая идеально-пластического материала эта задача исследована в (5).

Воспользуемся тороидальными координатами α, β, γ : $x = \rho \cos \gamma$, $y = \rho \sin \gamma$, $z = H \sin \beta$, где $H = a(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$, $\rho = a \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$; здесь $0 \leq \alpha \leq \infty$, $-\pi \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$. Считаем, что между компонентами деформаций и напряжений существует зависимость $\varepsilon_{\alpha\beta} = f(\sigma_0)(\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\sigma)$, где σ_0 — интенсивность касательных напряжений, $f(\sigma_0)$ — функция, характеризующая упрочнение материала, σ — среднее нормальное напряжение, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Перемещения (6) представим в виде

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_{\alpha 0} + \int F_\alpha d\gamma_{(\alpha, \beta)} \quad F_\alpha = 2\rho \varepsilon_{\alpha\gamma} - \frac{\rho^3}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma}{\rho} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)}, \\ u_\gamma &= u_{\gamma 0} + \int \left(\rho \varepsilon_{\gamma\gamma} - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} u_\alpha - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta \right) d\gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, $u_{\gamma 0}$ — произвольные функции α и β . Приняв, что тензор деформации не зависит от γ , из (1) приходим к трем соотношениям для компонентов деформаций

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial \alpha} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} u_{\beta 0} \Big|_{(\alpha, \beta)}, \quad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_{\beta 0}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_{\alpha 0}}{H} \right) \quad (2)$$

и к системе трех дифференциальных уравнений относительно F_α и F_β , решение которой

$$F_\alpha = (D_0 + D_1 z) \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + (D - D_1 \rho) \frac{1}{H} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \Big|_{(\alpha, \beta)}, \quad (3)$$

где D_0 и D — произвольные постоянные.

Сопоставляя выражение F_α из (1) и (3), получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\beta\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\alpha\gamma} \right) = D \frac{H^2}{\rho^3}. \quad (4)$$

Полагая в (2) равными нулю все компоненты деформации кроме $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}$ и решая полученную систему уравнений, находим выражения $u_{\alpha 0}$ и $u_{\beta 0}$.

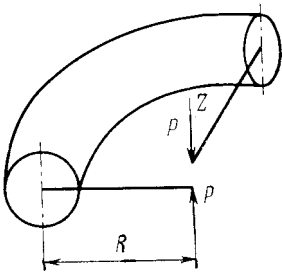


Рис. 1

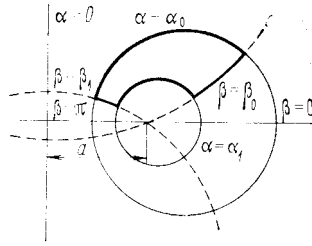


Рис. 2

После подстановки этих величин из (3) в (1) получим выражения для перемещения

$$u_{\alpha} = [A_1 \sin \gamma - B_1 \cos \gamma + (A_2 \sin \gamma - B_2 \cos \gamma) z] \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \\ + [E_1 + D\gamma - (A_2 \sin \gamma - B_2 \cos \gamma) \rho] \frac{1}{H} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \Big|_{(\alpha, \beta)}, \\ u_{\gamma} = u_{\gamma 0} + (A_2 \cos \gamma + B_2 \sin \gamma + C_2) z + A_1 \cos \gamma - B_1 \sin \gamma + C_1;$$

здесь A_i, B_i, C_i — произвольные постоянные.

Далее, полагая в уравнениях равновесия ⁽⁶⁾ отличными от нуля только напряжения $\sigma_{\alpha\gamma}$ и $\sigma_{\beta\gamma}$ и учитывая выражения коэффициентов Ламэ, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (H \rho^2 \sigma_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H \rho^2 \sigma_{\beta\gamma}) = 0.$$

Вводя функцию напряжений

$$\sigma_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{H \rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad \sigma_{\beta\gamma} = \frac{1}{H \rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha},$$

от (4) приходим к основному уравнению нашей задачи

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{f(\sigma_0)}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{f(\sigma_0)}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right] = D \frac{H^2}{\rho^3}. \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к определению функции Φ из уравнения (5) в области поперечного сечения стержня при условии $\Phi = \text{const}$ на контуре.

Рассмотрим случай, когда поперечное сечение ограничено двумя неконцентрическими окружностями $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha = \alpha_1$. Полагаем, что $f(\sigma_0) = 1 + \lambda \omega^v$, где $\omega = \sigma_0^2$, а λ и v — некоторые положительные параметры, причем для простоты принимаем v целым.

Решение уравнения (5) ищем в виде степенного ряда по параметру

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Phi_k; \quad (6)$$

значение Φ_0 соответствует случаю идеально упругого материала.

Положим также

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \omega_k, \quad \omega_n = \rho^{-4} \sum_{k=0}^n \text{grad } \Phi_k \text{ grad } \Phi_{n-k}. \quad (7)$$

Преобразуя (5) и подставляя в него разложения (6), (7), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \beta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \beta} = H^2 \Phi_n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $\Phi_0 = D$, а Φ_n при $n \geq 1$ определяется из рекуррентной зависимости

$$\Phi_n = - \sum_{k=0}^{n-1} (u_k N_{n-1-k} + v_k \Phi_{n-1-k}),$$

причем

$$N_n = \sum_{k=0}^n \text{grad } \Phi_k \text{ grad } \omega_{n-k}, \quad u_0 = v \omega_0^{v-1}, \quad v_0 = \omega_0^v,$$

$$u_n = \frac{1}{n \omega_0} \sum_{k=1}^n (kv - n) \omega_k u_{n-k}, \quad v_n = \frac{1}{n \omega_0} \sum_{k=1}^n (kv - n + k) \omega_k v_{n-k}.$$

Вводя новую функцию $\psi_n(\alpha, \beta)$ при помощи соотношения $\Phi_n(\alpha, \beta) = (\text{ch } \alpha - \cos \beta)^{-1/2} \psi_n(\alpha, \beta)$, из (8) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \beta^2} - 3 \text{cth } \alpha \frac{\partial \psi_n}{\partial \alpha} + \frac{9}{4} \psi_n = H^2 (\text{ch } \alpha - \cos \beta)^{1/2} \psi_n. \quad (9)$$

На внешней окружности $\psi_n(\alpha_0, \beta) = 0$, а на внутренней $\psi_n(\alpha_1, \beta) = b_n (\text{ch } \alpha - \cos \beta)^{1/2}$, где $b_0 = \text{const}$, $b_1 = b_2 = \dots = 0$.

Предварительно введем функцию

$$Z_n^m(\alpha, \beta) = P_n^m(\text{ch } \alpha) Q_n^m(\text{ch } \beta) - P_n^m(\text{ch } \beta) Q_n^m(\text{ch } \alpha),$$

где $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода m -го порядка n -го индекса ⁽⁷⁾.

Решение уравнений (9), удовлетворяющее указанным выше условиям, будет

$$\psi_n(\alpha, \beta) = \frac{b_n \text{sh}^2 \alpha}{2\pi \text{sh}^2 \alpha_1} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{ch } \alpha_1 - \cos \eta)^{1/2} L(\alpha, \beta; \eta) d\eta +$$

$$+ \frac{\text{sh}^2 \alpha}{2\pi} \iint_{\Omega} \varphi_n(\xi, \eta) (\text{ch } \xi - \cos \eta)^{1/2} G(\alpha, \beta; \xi, \eta) d\Omega; \quad (10)$$

здесь $d\Omega = H^2 d\xi d\eta$,

$$L(\alpha, \beta; \eta) = \frac{Z_{-1/2}^2(\alpha_0, \alpha)}{Z_{-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha)}{Z_{n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} \cos n(\beta - \eta),$$

а G — функция Грина для данной задачи, причем $G = K(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ при $\alpha \leq \xi$, где

$$K(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{16}{9} Z_{-1/2}^2(\xi, \alpha_0) \frac{Z_{-1/2}^2(\alpha_1, \alpha)}{Z_{-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{n-1/2}^2(\xi, \alpha_0)}{(n^2 - 9/4)(n^2 - 1/4)} \frac{Z_{n-1/2}^2(\alpha_1, \alpha)}{Z_{n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} \cos n(\beta - \eta), \quad (11)$$

и $G = K(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $\alpha \leq \xi$.

В частном случае, когда поперечное сечение стержня представляет сплошной круг, переходя к пределу $\alpha_1 \rightarrow \infty$ в (10), (11), будем иметь

$$\psi_n(\alpha, \beta) = \frac{\text{sh}^2 \alpha}{2\pi} \iint_{\Omega} \varphi_n(\xi, \eta) (\text{ch } \xi - \cos \eta)^{1/2} G_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) d\Omega,$$

где $G_0 = K_0(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ при $\xi \leq \alpha$, причем

$$K_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{16}{9} Z_{-1/2}^2(\alpha_0, \xi) \frac{Q_{-1/2}^2(\text{ch } \alpha)}{Q_{-1/2}^2(\text{ch } \alpha_0)} + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{n-1/2}^2(\alpha_0, \xi)}{(n^2 - 9/4)(n^2 - 1/4)} \frac{Q_{n-1/2}^2(\text{ch } \alpha)}{Q_{n-1/2}^2(\text{ch } \alpha_0)} \cos n(\beta - \eta),$$

и $G_0 = K_0(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $\alpha \leq \xi$.

Для криволинейного прямоугольника (рис. 2) решение получается в виде (10), где следует положить $b_n = 0$, 2π заменить на $\beta_1 - \beta_0$, а вместо (11) положить

$$K(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \\ = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\mu_n-1/2}^2(\xi, \alpha_0)}{(\mu_n^2 - 9/4)(\mu_n^2 - 1/4)} \frac{Z_{\mu_n-1/2}^2(\alpha_1, \alpha)}{Z_{\mu_n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} \sin \mu_n(\beta - \beta_0) \sin \mu_n(\eta - \beta_0),$$

где $\mu_n = n\pi/(\beta_1 - \beta_0)$. Очевидно, это решение содержит ряд частных случаев, в том числе и решение для полукругового сечения.

Вводя норму $\|X\| = \max |X| + \sup |X(A) - X(B)|/AB^\delta$, где A, B — произвольные точки внутри поперечного сечения стержня, $\delta < 1$, при помощи априорных оценок Шаудера⁽⁸⁾, которые в данном случае пишутся в виде $\|D^2 \Phi_n\| \leq c \|\varphi_n\|$, получаем (при $\nu = 1$) рекуррентную систему неравенств

$$\|\varphi_{n+1}\| \leq MD^2 \sum_{k=1}^n \|\varphi_k\| q_{n-k}, \quad q_n = \sum_{k=0}^n \|\varphi_k\| \|\varphi_{n-k}\|,$$

где

$$M = 2c^2 \|H^{-2} \rho^{-4}\| + 4c^3 \|H^{-2}\| \left[\left\| \frac{\partial}{\partial \alpha} (H^{-2} \rho^{-4}) \right\| + 2 \|H^{-2} \rho^{-4}\| \right].$$

Методом индукции получена оценка $\|\varphi_n\| \leq 0,062 n^{-1,6} \lambda_*^{-n+1}$, где $\lambda_* = 0,062 M^{-1} D^{-2}$. Тогда ряд с общим членом $\lambda_*^n \|\varphi_n\|$, а следовательно, и ряд (6) сходятся абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = \lambda_*$.

Институт механики
Академии наук АрмССР
Ереван

Поступило
2 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ O. Göhner, Ingenier Arch., v. 1, H. 5 (1930); v. 2, H. 1, 2, 4 (1931). ² W. Freiberger, Austr. J. Sci. Res., Ser. A, v. 2, № 3 (1949). ³ H. L. Langhaar, J. Appl. Mech., v. 19, № 1 (1952). ⁴ А. Л. Рабинович, Тр. Московск. физ.-техн. ин-та, Иссл. по механике и прикл. математике, в. 1, М., 1958. ⁵ Д. Д. Ивлев, Теория идеальной пластичности, М., 1966. ⁶ В. В. Новожилов, Теория упругости, М.—Л., 1958. ⁷ Е. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, М., 1957. ⁸ Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1965.