

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. НАГНИБИДА

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ В СМЫСЛЕ М. В. КЕЛДЫША ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В этой заметке нами продолжены начатые в ^(1, 2) исследования по кратной полноте различных систем аналитических функций. Обозначим через $A(D)$, как обычно, пространство всех однозначных и аналитических в ограниченной односвязной области D функций с топологией компактной сходимости и напомним следующее (см. ⁽¹⁾)

Определение. Система $\{\psi(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$, где $\psi(z)$ — целая функция, а $\{\lambda_k\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел, называется n -кратно полной, $n \geq 1$, в пространстве $A(D)$ в смысле М. В. Келдыша, если любые n функций $g_1(z), \dots, g_n(z)$ из $A(D)$ можно представить в виде

$$g_v(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} \lambda_k^{v-1} \psi(\lambda_k z), \quad v=1, 2, \dots, n,$$

с коэффициентами $a_k^{(N)}$, не зависящими от v .

Так как при $n=1$ это определение совпадает, очевидно, с определением обычной полноты, то в дальнейшем следует ограничиться рассмотрением случая $n \geq 2$. Отметим далее (см. ⁽¹⁾), что система $\{\psi(\lambda_k z)\}$, будет n -кратно полной в $A(D)$ в смысле Келдыша лишь в том и только в том случае, когда из соотношений

$$L_1(\psi(\lambda_k z)) + \lambda_k L_2(\psi(\lambda_k z)) + \dots + \lambda_k^{n-1} L_n(\psi(\lambda_k z)) = 0, \quad (1) \\ k=1, 2, \dots,$$

где L_v , $v=1, 2, \dots, n$, — линейные непрерывные функционалы в $A(D)$, следует $L_v \equiv 0$, $v=1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим функцию $\psi(z) = b_1 e^z + b_2 e^{-z}$, где b_1 и b_2 ($b_1 \pm b_2 \neq 0$) — отличные от нуля комплексные числа, и найдем условия двухкратной полноты системы вида $\{\psi(\lambda_k z)\}$ в пространстве $A(D)$, если D совпадает с кругом радиуса $R > 0$ с центром в некоторой точке $z_0 \neq 0$, $R \leq |z_0|$.

Замечание 1. Как показано в ⁽¹⁾, система $\{\psi(\lambda_k z)\}$ не может быть ни при каких $\{\lambda_k\}$ кратно полной хотя бы в одном из $A(D)$, если только область D содержит начало координат. Следовательно условие $R \leq |z_0|$ необходимо. Необходимыми для двухкратной полноты рассматриваемой системы являются также условия $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$, ибо для системы $\{e^{\omega \lambda_k z}\}$ соотношения (1) выполняются, например, для функционалов L_1 и L_2 , определяемых (см. ⁽³⁾) соответственно функциями $\gamma_1(z) = -1/(z-z_0)^2$, $\gamma_2(z) = \omega/(z-z_0)$.

Теорема. Пусть D_{R, z_0} — круг $|z-z_0| < R$, $\psi(z) = b_1 e^z + b_2 e^{-z}$, где b_1 и b_2 , $b_1 \pm b_2 \neq 0$, — отличные от нуля комплексные числа, а $\{\lambda_k\}$ — множество единственности для целых функций класса $[1, R)$.

Тогда система $\{\psi(\lambda_k z)\}$ двукратно полна в пространстве $A(D_{R, z_0})$ в смысле Келдыша.

Доказательство. Пусть определяемые соответственно функциями

$$\gamma_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m^{(1)}}{(z-z_0)^{m+1}} \quad \text{и} \quad \gamma_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m^{(2)}}{(z-z_0)^{m+1}},$$

где

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |\gamma_m^{(1)}|^{1/m} < R, \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |\gamma_m^{(2)}|^{1/m} < R,$$

линейные непрерывные в $A(D_{R, z_0})$ функционалы L_1 и L_2 удовлетворяют соотношениям (1), т. е. (см. (3))

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \psi(\lambda_k z) \gamma_1(z) dz + \frac{\lambda_k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \psi(\lambda_k z) \gamma_2(z) dz = 0, \quad k=1, 2, \dots,$$

(здесь Γ — произвольный замкнутый спрямляемый контур в D_{R, z_0} , охватывающий все особенности функций $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$). Тогда вспомогательная функция

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \psi(\lambda z) \gamma_1(z) dz + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\Gamma} \psi(\lambda z) \gamma_2(z) dz$$

является, в чем нетрудно убедиться, целой функцией класса $[1, R)$ и $\Phi(\lambda_k) = 0$, $k=1, 2, \dots$. Следовательно, $\Phi(\lambda) \equiv 0$. Последнее же тождество равносильно следующему:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} \psi_m C_m^s \gamma_s^{(1)} z_0^{m-s} \lambda^m + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} \psi_m C_m^s \gamma_s^{(2)} z_0^{m-s} \lambda^{m+1} = 0, \quad (2)$$

где

$$\psi_m = \frac{1}{m!} [b_1 + (-1)^m b_2], \quad m=0, 1, \dots$$

Меняя в (2) порядок суммирования и приравнявая коэффициенты при всех степенях λ к нулю, мы немедленно приходим к равносильной (2) системе уравнений

$$\gamma_0^{(1)} = 0; \quad (3)$$

$$\psi_{m+1} \sum_{s=0}^m C_{m+1}^{s+1} \gamma_{s+1}^{(1)} z_0^{m-s} + \psi_m \sum_{s=0}^m C_m^s \gamma_s^{(2)} z_0^{m-s} = 0, \quad m=0, 1, \dots \quad (4)$$

В свою очередь, введя в рассмотрение целые функции

$$\varphi_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_{s+1}^{(1)}}{(s+1)!} z^s \quad \text{и} \quad \varphi_2(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s^{(2)}}{s!} z^s,$$

можно записать соотношения (4) в виде

$$[b_1 + (-1)^{m+1} b_2] (\varphi_1(z) e^{z_0 z})^{(m)} \Big|_{z=0} + [b_1 + (-1)^m b_2] (\varphi_2(z) e^{z_0 z})^{(m)} \Big|_{z=0} = 0, \\ m=0, 1, \dots$$

или же

$$\varphi_1(z) e^{z_0 z} + T[\varphi_2(z) e^{z_0 z}] = 0, \quad (5)$$

где T — изоморфизм пространства A_{∞} целых функций на себя, определяемый на элементах степенного базиса соотношениями

$$Tz^{2m} = \frac{b_1 + b_2}{b_1 - b_2} z^{2m}, \quad Tz^{2m+1} = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} z^{2m+1}, \quad m=0, 1, \dots$$

Другими словами, для любой функции $f(z) \in A_{\infty}$ имеем

$$Tf(z) = \beta \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{1}{\beta} \frac{f(z) - f(-z)}{2}, \quad \beta = \frac{b_1 + b_2}{b_1 - b_2}. \quad (6)$$

Поэтому, с учетом (6), соотношение (5) равносильно следующему:

$$\varphi_1(z) + \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \varphi_2(z) + \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \varphi_2(-z) e^{-2z_0 z} \equiv 0. \quad (7)$$

Запишем, наконец, (7) в виде

$$\psi_1(z) = \psi_2(z) e^{-2z_0 z}, \quad (8)$$

где целые функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, очевидно, принадлежат классу $[1, R)$, и заметим, что, как видно из (8),

$$\psi_1\left(\frac{k\pi i}{z_0}\right) = \psi_2\left(\frac{k\pi i}{z_0}\right), \quad k=0, \pm 1, \dots$$

Воспользуемся, далее, следующей теоремой единственности из работы (4) (см. также (3)):

Пусть $\varphi(\xi)$ — целая функция класса не выше $[\rho, \sigma]$ и пусть точки $\{\xi_k\}$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\xi_k|^\rho} = \kappa > 0,$$

лежат в угле раствора 2α , $0 \leq \alpha < \min(\pi/2, \pi/2\rho)$, с вершиной в начале координат. Тогда из того, что $\sigma < \pi \kappa \cos \alpha$, следует, что функция $\varphi(\xi)$, обращаясь в нуль в точках $\{\xi_k\}$, есть тождественный нуль.

В нашем случае $\rho=1$, $\sigma < R \leq |z_0|$, $\xi_k = k\pi i/z_0$, $\alpha=0$ и $\kappa = |z_0|/\pi$. Поэтому, так как $R \leq |z_0|$, $\psi_1(z) \equiv \psi_2(z)$. Но $z_0 \neq 0$ и из (8) следует, что $\psi_1(z) \equiv \psi_2(z) \equiv 0$. Следовательно, если учесть (7), $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z) \equiv 0$ и, тем самым (учтите еще (3)!) $\gamma_1(z) \equiv \gamma_2(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть D — произвольная ограниченная односвязная область, целиком лежащая внутри угла раствора, меньшего π , с вершиной в начале координат, $\psi(z) = b_1 e^z + b_2 e^{-z}$, где b_1 и b_2 , $b_1 \pm b_2 \neq 0$, — отличные от нуля комплексные числа, а $\{\lambda_k\}$ — множество единственности для целых функций класса $[1, \infty)$.

Тогда система $\{\psi(\lambda_k z)\}$ двукратно полна в пространстве $A(D)$ в смысле Келдыша.

Справедливость этого утверждения немедленно следует из предыдущей теоремы и того, что при сделанных предположениях область можно поместить в круг, не содержащий начало координат. Будучи двукратно полной в этом круге рассматриваемая система будет таковой и в области D .

Замечание 2. Любопытно отметить, что рассматриваемая здесь система ни в одном из пространств $A(D)$ (здесь, как и раньше, D — произвольная ограниченная односвязная область) n -кратно полной быть уже не может, если только $n \geq 3$. Действительно, взяв произвольную точку $z_1 \in D$, рассмотрим функции $\gamma_1(z), \dots, \gamma_n(z)$, среди которых $\gamma_1(z) = -2(z-z_1)^{-2}$, $\gamma_2(z) = 1/(z-z_1)$, а остальные равны тождественно нулю. Тогда соответствующие им функционалы $L_1, \dots, L_n$, очевидно, удовлетворяют (1).

Замечание 3. Доказанная теорема (и соответственно следствие) справедлива и в том случае, когда $b_1 = b_2 \neq 0$ или же $b_1 = -b_2 \neq 0$. Действительно, если, например $b_1 = b_2 \neq 0$, то, как следует из соотношений, непосредственно предшествующих тождеству (5),

$$(\varphi_2(z) e^{z_0 z})^{(2j)}|_{z=0} = 0, \quad (\varphi_1(z) e^{z_0 z})^{(2j+1)}|_{z=0} = 0, \quad j=0, 1, \dots,$$

или же

$$\varphi_2(z) + \varphi_2(-z) e^{-2z_0 z} \equiv 0, \quad \varphi_1(z) - \varphi_1(-z) e^{-2z_0 z} \equiv 0.$$

Отсюда, как и раньше из (8), следует, что $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z) \equiv 0$.

Замечание 4. Пусть $G(\lambda) = \lambda^a (\sin a\lambda - \sin ia\lambda)$, $a < a < 1$, D — некоторая односвязная область, расположенная внутри единичного круга и содержащая точку a , $\lambda_k = [(1+i)/a]k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $\psi(z) = \sin z -$

$-\sin iz$. Рассмотрим в пространстве $A(D)$ функционал $\Gamma[f(z)] = f^{(4)}(a)$. Поскольку, очевидно, $\Gamma[\psi(\lambda z)] = G(\lambda)$, то $\Gamma[\psi(\lambda_k z)] = G(\lambda_k) = 0$, $k=0, \pm 1, \dots$, и, таким образом, система $\{\psi(\lambda_k z)\}$ не может быть полной в пространстве $A(D)$ даже в обычном смысле (ср. с результатом из (6) при $n=4$).

Заметим далее, что система $\{\psi_0(\lambda_k x)\}$ полна в пространстве $\mathcal{L}_2[0, a]$ тогда и только тогда, когда также единственным функционалом, аннулирующимся на $\{\psi_0(\lambda_k x)\}$, является нулевой.

Полагая же $\psi_0(z) = \cos z - i \cos iz$ и рассматривая в $\mathcal{L}_2[0, a]$ функционал $\Gamma_0[f] = \int_0^a f(x) dx$, мы легко найдем, что $\Gamma_0[\psi_0(\lambda_k x)] = 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Следовательно, соответствующая система $\{\psi_0(\lambda_k x)\}$ также не полна в $\mathcal{L}_2[0, a]$ в обычном смысле (ср. с утверждением статьи (6) при $n=4$).

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
24 I 1975

Черновицкий государственный университет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Ибрагимов, Н. И. Нагнибида, ДАН, т. 214, № 5 (1974). ² И. И. Ибрагимов, Н. И. Нагнибида, ДАН, т. 222, № 4 (1975). ³ А. И. Маркушевич, Матем. сб., т. 17, № 2 (1945). ⁴ F. und R. Nevanlinna, Acta Soc. Fennica, L: 5 (1922). ⁵ М. Г. Гасимов, Докл. АН АзербССР, № 7 (1971). ⁶ М. Г. Мехтиев, Ден. ВИНТИ, № 6209-73 (см. РЖМат. 10 (1973)).