

Ю. А. АЛЬПИН, Р. Г. БУХАРАЕВ

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ ПРИЗНАКЕ НЕПРЕДСТАВИМОСТИ ЯЗЫКОВ В КОНЕЧНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТАХ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 17 III 1975)

Критерий представимости языков в конечных вероятностных автоматах (критерий стохастичности) получен одним из авторов еще в 1965 г. ⁽²⁾. Однако этот критерий не содержит в явном виде информацию о структуре стохастических языков, поэтому характеристика языков, представимых в конечных вероятностных автоматах, представляет интерес и сейчас. Важно это и с точки зрения сопоставления различных классов языков. Одна из форм подхода к анализу структуры представимых языков состоит в конструировании позитивных и негативных примеров представимости. Первый пример нестохастического языка построен в 1965 г. также одним из авторов ^(2, 4), в последние годы появилась уже серия примеров нестохастических языков, полученных различными авторами ^(7, 8, 10, 12).

В настоящей заметке мы приводим некоторое достаточное условие нестохастичности языков, которое позволяет предложить методику для конструирования примеров нестохастических языков *.

Изучение структуры словарных функций и языков, представимых вероятностными автоматами, приводят к более широкому классу систем — общим линейным автоматам. Общий линейный автомат есть совокупность

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{A}, \{\delta_x, x \in \mathcal{X}\}, \bar{u}, \lambda(\bar{u}) \rangle,$$

где $\mathcal{X}$ — конечный входной алфавит, $\mathcal{A}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел, пространство состояний, δ_x — линейный оператор в $\mathcal{A}$, соответствующий входному сигналу x , $\bar{u} \in \mathcal{A}$ — начальное состояние автомата, λ — линейный функционал в $\mathcal{A}$, принимающий комплексные значения, — функция отметок состояний.

Функция переходов естественным образом обобщается на входные слова. Пустому слову e соответствует тождественный оператор, слову px — оператор $\delta_x \delta_p$. Согласно определенной таким образом функции переходов, автомат переходит из состояния $\bar{u}$ после подачи на вход слова p в состояние $\delta_p(\bar{u})$. Общий линейный автомат представляет числовую словарную функцию φ : $\varphi(p) = \lambda(\delta_p(\bar{u}))$, $p \in F_{\mathcal{X}}$, где $F_{\mathcal{X}}$ — свободная полугруппа над алфавитом $\mathcal{X}$. Назовем размерностью автомата размерность пространства состояний $\mathcal{A}$.

Обозначим через E множество всех комплекснозначных функций, определенных на свободной полугруппе $F_{\mathcal{X}}$. E образует линейное пространство относительно естественно определенных операций сложения функций и умножения функции на число. Сопоставим каждой букве x , $x \in \mathcal{X}$, оператор γ_x в E , переводящий элемент φ в элемент φ_x , определяемый условием

$$\varphi_x(p) = \varphi(xp), \quad x \in \mathcal{X}, \quad p \in F_{\mathcal{X}}.$$

Этот оператор линеен, как легко проверить.

Определим далее функционал κ в E , положив

$$\kappa(\varphi) = \varphi(e).$$

* Недавно Я. К. Лапиньш ⁽¹²⁾ получил семейство нестохастических языков, для которого вопрос о приложимости нашей методики является открытым.

$$\langle \mathbb{X}, E, \{\gamma_x, x \in \mathbb{X}\}, \kappa \rangle$$

назовем универсальным общим линейным автоматом. При надлежащем выборе начального состояния универсальный автомат представляет любую функцию $\varphi \in E$. Действительно, пусть φ — начальное состояние универсального автомата. Под воздействием слова p автомат переходит в состояние $\gamma_p(\varphi) = \varphi_p$. Значение функции отметок κ , соответствующее слову p ,

$$\kappa(\gamma_p(\varphi)) = \kappa(\varphi_p) = \varphi_p(e) = \varphi(p).$$

Обозначим через E_φ пространство E , натянутое на множество состояний, достижимых из φ , т. е. на множество $L_\varphi = \{\varphi_p, p \in F_x\}$. Иначе E_φ можно определить как наименьшее подпространство E , содержащее φ и инвариантное относительно системы преобразований $\{\gamma_x, x \in \mathbb{X}\}$. Проекция системы операторов $\{\gamma_x, x \in \mathbb{X}\}$ и функционала κ на подпространство E_φ дает общий линейный автомат размерности $\dim E_\varphi$, представляющий φ . Рассмотрим произвольный общий линейный автомат, представляющий φ . Если состояния $\delta_{p_1}(u), \dots, \delta_{p_k}(u)$ этого автомата линейно зависимы, то в силу линейных свойств автомата, функции $\varphi_{p_1}, \dots, \varphi_{p_k}$ тоже линейно зависимы в E , поэтому размерность автомата, представляющего φ , не меньше размерности E_φ . Сказанное выше резюмирует

Теорема 1. *Любая числовая словарная функция φ может быть представлена в общем линейном автомате, размерность которого равна $\dim E_\varphi$. Размерность любого автомата, представляющего φ , не меньше чем $\dim E_\varphi$.*

В этой теореме можно видеть линейно-автоматный аналог теорем 8 и 9 работы (3) о представлении отображений в абстрактных автоматах.

Итак, функция φ представима в конечномерном общем линейном автомате, если пространство E конечномерно.

Это не единственный возможный подход. Числовые словарные функции, представимые конечномерными автоматами, изучались в терминах формальных степенных рядов (6), обобщенных ганкелевых матриц (11), линейных схем и весовых грамматик (3).

В вещественном пространстве векторов-строк R^n общий линейный автомат задается в форме, аналогичной заданию вероятностного автомата, как система

$$\langle \mathbb{X}, R^n, \{A(x), x \in \mathbb{X}\}, \bar{v}, \bar{m} \rangle,$$

где $A(x)$ — вещественные, не обязательно стохастические, матрицы, $\bar{m}$ — вектор-столбец из вещественных чисел. Пусть $\varphi(p)$, $p \in F_x$, — вещественнозначная словарная функция. Символом $L(\varphi, \lambda)$ обозначим язык, состоящий из всех слов p , для которых выполнено неравенство $\varphi(p) > \lambda$, λ — вещественная константа. Туракайнен (9) установил принципиальный факт, состоящий в том, что если φ реализуется линейным конечномерным автоматом в R^n , то язык $L(\varphi, \lambda)$ представим в некотором конечном вероятностном автомате множеством состояний. Заметим, что язык $L(\varphi, \lambda)$ совпадает с языком $L(g, 0)$, где $g(p) = \varphi(p) - \lambda$, причем размерность пространства E_g разве что на единицу больше размерности E_φ . Поэтому будем всегда полагать $\lambda = 0$ и писать просто $L(\varphi)$ вместо $L(\varphi, 0)$.

Следующая теорема усиливает соответствующие результаты Карлайла и Паза (11).

Теорема 2. *Пусть вещественнозначная словарная функция $\varphi(p)$ представлена n -мерным общим линейным автоматом.*

Тогда функция

$$g(p) = c^{|p|} \varphi(p) + 1/(n+5)$$

представима в конечном вероятностном автомате с дважды стохастическими матрицами перехода, с фиксированным начальным состоянием, единственным финальным состоянием и $n+5$ состояниями. Здесь c — некоторая

константа, $|p|$ — длина слова p . Этот вероятностный автомат представляет язык $L(\varphi)$ с точкой сечения $1/(n+5)$.

Эта теорема позволяет нам строить достаточный признак непредставимости, рассматривая общие линейные автоматы.

Пусть L и Q — языки в алфавите $\mathfrak{X}$, причем Q — конечное множество мощности $|Q|$. Символом Q_p обозначим подмножество Q , возможно, пустое, состоящее из всех слов q таких, что $qp \in L$. Введем отношение $\equiv(Q, L)$ на свободной полугруппе $F_{\mathfrak{X}}$ условием

$$p \equiv r(Q, L) \leftrightarrow Q_p = Q_r.$$

Ясно, что $\equiv(Q, L)$ является отношением эквивалентности и число классов эквивалентности, т. е. его ранг, не превышает $2^{|Q|}$. Максимум ранга достигается, если для всякого подмножества Q' , $Q' \leq Q$, найдется слово p такое, что $Q_p = Q'$.

Лемма. Пусть дан язык $L = L(\varphi)$. Если для конечного множества слов Q ранг отношения $\equiv(Q, L)$ равен $2^{|Q|}$, то

$$\dim E_{\varphi} \geq |Q|.$$

Доказательство. В основе доказательства лежит та же идея, на которой основан пример нестохастического языка ⁽²⁾. Пусть $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$. Покажем, что функции $\varphi_{q_1}, \varphi_{q_2}, \dots, \varphi_{q_k}$ линейно независимы. Предположим обратное: пусть $c_1, c_2, \dots, c_k$ — не все равные нулю числа такие, что

$$\forall p \left\{ p \in F_{\mathfrak{X}} \rightarrow \sum_{i=1}^k c_i \varphi_{q_i}(p) = 0 \right\}.$$

Пусть I — множество индексов такое, что $i \in I \leftrightarrow c_i > 0$. В силу предположения леммы для любого I существует такое слово p , что $i \in I \leftrightarrow \varphi_{q_i}(p) > 0$.

Но тогда $\sum_{i=1}^k c_i \varphi_{q_i}(p) > 0$, что противоречит предположению о линейной зависимости функций φ_{q_i} . Это рассуждение неприменимо для случая, когда I пусто. В этом случае выберем такое слово p , чтобы $i \notin I \leftrightarrow \varphi_{q_i}(p) > 0$, и это вновь приведет нас к противоречию.

Из теоремы 1, 2 и леммы вытекает следующая

Теорема 3. Пусть язык L обладает свойством: для любого натурального n найдется множество $Q \subset F_{\mathfrak{X}}$, $|Q| = n$, такое, что ранг отношения $\equiv(Q, L)$ равен $2^{|Q|}$.

Тогда язык L непредставим ни в каком конечном вероятностном автомате.

Теорема 3 позволяет строить простые нестохастические языки, с помощью стандартного приема можно показать, что примеры нестохастических языков, приводимые в работах ^(7, 8, 10), удовлетворяют условиям теоремы 3.

1. Покажем это для языка $L_1 = AF_{\mathfrak{X}}$ ⁽¹⁰⁾ в алфавите $\mathfrak{X}$, содержащем не менее двух букв. Здесь A — язык, состоящий из всех симметричных слов длины не менее трех. Обозначим через $\bar{p}$ обращение слова p . Положим, что Q состоит из слов

$$q_i = 110^i 10^{i+1} 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \{0, 1\} \subset \mathfrak{X},$$

и пусть Q' — произвольное подмножество Q , $Q' = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_k}\}$. Построим последовательность слов p_j , $j = 1, 2, \dots, k$, следующим образом:

$$p_1 = \bar{q}_{i_1}, \quad p_2 = p_1 \bar{p}_1 q_{i_2}, \dots, \quad p_j = p_{j-1} \bar{p}_{j-1} q_{i_j}.$$

Слово p_k по построению таково, что слово qp_k , $q \in F_{\mathfrak{X}}$, входит в $AF_{\mathfrak{X}}$ в том и только том случае, если $q \in Q'$. Слова с таким свойством, соответствующие

различным подмножествам Q , неэквивалентны в смысле $\equiv (Q, L)$, что и доказывает выполнение условий теоремы 3.

2. $L_2 = \{a^n b^{n_k}, n=1, 2, \dots, k=1, 2, \dots\}$. Пусть $Q = \{a^{i_1}, a^{i_2}, \dots, a^{i_n}\}$, где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — взаимно простые числа. Если Q' — произвольное подмножество Q , то обозначим через s произведение длин слов из Q' . Из взаимной простоты чисел $i_1, i_2, \dots, i_n$ вытекает, что если $a^i \in Q$, то включение $a^i b^s \in L_2$ имеет место тогда и только тогда, если $a^i \in Q'$.

3. Контекстно-свободный язык (⁷)

$$L_3 = \{a^i b a^{j_1} b a^{j_2} \dots b a^{j_r} b, i=j_1 + \dots + j_r, 1 \leq r \leq r\}.$$

Положим $Q = \{a^1, a^2, \dots, a^n\}$, пусть $Q' = \{a^{i_1}, \dots, a^{i_s}\}$ — произвольное подмножество Q , $i_1 < i_2 < \dots < i_s$. Легко составить слово $u = b a^{i_1} b a^{i_2} \dots b a^{i_s} b$ такое, что $j_1 + j_2 + \dots + j_k = i_k, 1 \leq k \leq s$. Очевидно, что

$$a^i \in Q \rightarrow a^i u \in L_3 \leftrightarrow a^i \in Q',$$

а это влечет для выбранного Q выполнение условий теоремы 3.

4. Язык L_4 (⁸) в однобуквенном алфавите строится следующим образом. Пусть двоичная последовательность $u_1, u_2, \dots$ есть лексикографическое упорядочение всех слов в алфавите $\{0, 1\}$. Тогда

$$L_4 = \{a^k: u_k = 1\}.$$

Положим $Q = \{a^1, \dots, a^n\}$, $Q' = \{a^{i_1}, \dots, a^{i_s}\}$ — произвольное подмножество Q . Пусть $u_{i+1}, \dots, u_{i+k}$ — часть последовательности $u_1, u_2, \dots$ такая, что $u_{i+i} = 1$, если $a^i \in Q'$. Тогда

$$a^i \in Q \rightarrow a^i a^i \in L_4 \leftrightarrow a^i \in Q', \quad i=1, \dots, n.$$

Научно-исследовательский институт математики и механики
им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного университета
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
24 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Г. Бухараев, Вероятностные автоматы, Казань, Изд-во КГУ, 1970. ² Р. Г. Бухараев, ДАН, т. 164, № 2 (1965). ³ В. М. Глушкова, УМН, т. 16 (1961). ⁴ Y. Inagaki, T. Fukutsuma, H. Matsumura, Inf. and Control, v. 20, № 5 (1972). ⁵ А. А. Мучник, А. Н. Маслов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 133 (1973). ⁶ М. Р. Schützenberger, Inf. and Control, v. 4, 3 (1961). ⁷ M. Nasu, N. Honda, Inf. and Control, v. 8, № 3 (1971). ⁸ A. Paz, Ann. Acad. sci. Fennicae, Ser. A-1, № 493 (1971). ⁹ P. Turakainen, Proc. Am. Math. Soc., v. 21, № 2 (1969). ¹⁰ Phan Dinh Dieu, Electron. Informationsverarb. u. Kybernetik, B. 8, № 10 (1972). ¹¹ J. W. Carlyle, A. Paz, J. Comp. and Syst. Sci., v. 5, № 1 (1971). ¹² Я. К. Лапиньш, Автоматика и вычислительная техника, т. 4 (1974).