

В. А. ВЕРШИНИН

К ВОПРОСУ О НАЛОЖИМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ МНОЖЕСТВ С РАВЕНСТВОМ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 12 III 1975)

Заметка принадлежит конструктивному направлению в математике (¹, ²). Излагаются результаты, касающиеся невозможности построения конструктивных отображений одних множеств с равенством (³) в другие. Понятия, введенные в (⁴, ⁵), будем использовать в данной работе без пояснений. Для краткости опускаем в дальнейшем прилагательное «нормальный» перед словом «алгоритм».

Зафиксируем логико-математический язык $\mathcal{A}$ описанного в (²) типа. Пусть A — один из основных алфавитов этого языка, и пусть буква $*$ не входит в A . Будем называть каноническим r -множеством класса $\Pi =$ в алфавите A всякое слово p , представляющее собой запись алгоритма в алфавите $*A^a$, перерабатывающего те слова алфавита $*A$, к которым он применим, в пустое слово не применимого к словам алфавита $*A$, не представимым в виде $a*b$, где a и b — слова алфавита A , и такого, что условие, выражаемое предикатом $! \langle p \rangle (x*y)$, определяет для слов алфавита A перечислимое условие равенства. Аналогично определяются канонические r -множества класса $\Pi \neq$, только вместо предиката $! \langle p \rangle (x*y)$ рассматривается предикат $\neg ! \langle p \rangle (x*y)$, определяющий для слов алфавита A отношение равенства. Множество всех пар неравных слов в этом отношении равенства перечислимо.

Мы будем говорить, что слово p является каноническим r -множеством строго класса $\Pi =$ или $\Pi \neq$ в алфавите A , если p является каноническим r -множеством класса $\Pi =$ или соответственно $\Pi \neq$ в алфавите A и отношение равенства, определяемое предикатом $! \langle p \rangle (x*y)$ ($\neg ! \langle p \rangle (x*y)$ во втором случае), неразрешимо. Будем предполагать, что алфавит A фиксирован, и, говоря о канонических r -множествах строго класса $\Pi =$ или $\Pi \neq$, слова «в алфавите A » будем опускать.

Каждому r -множеству над языком $\mathcal{A}$, имеющему нормальное перечислимое, но неразрешимое условие равенства или неравенства и основа которого есть множество всех слов алфавита A , можно естественным образом поставить в соответствие некоторое каноническое r -множество строго класса $\Pi =$ или $\Pi \neq$. Оно строится с использованием алгоритма, фильтрующего равенство или соответственно неравенство в рассматриваемом r -множестве. Обратно, каждому каноническому r -множеству строго класса $\Pi =$ или $\Pi \neq$ можно поставить в соответствие r -множество над языком $\mathcal{A}$, основу которого — множество всех слов алфавита A — можно построить, для определенности, методом, описанным в (²), § 7, а условие равенства определить формулой $\forall xy (! \langle p \rangle (x*y))$ или $\forall xy (\neg ! \langle p \rangle (x*y))$ ($\forall$ — квантор предикации). При этих соответствиях два r -множества всех слов алфавита A , имеющие нормальное перечислимое условие равенства или неравенства и не имеющие разрешимого условия равенства, равны в том и только том случае, когда поставленные им в соответствие канонические r -множества являются записями алгоритмов, эквивалентных относительно алфавита $*A$.

Пусть $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$) — r -множество всех канонических r -множеств строго класса $\Pi =$ (соответственно $\Pi \neq$) со следующим отношением равенства: два элемента p и q равны тогда и только тогда, когда алгоритмы $\langle p \rangle$ и $\langle q \rangle$ эквивалентны относительно алфавита $*A$. Ниже, мы рассматриваем массовые проблемы, исходными данными для которых служат произвольные

канонические r -множества строго класса $\Pi =$ или $\Pi \neq$. Из неразрешимости всякой такой алгоритмической проблемы следует неразрешимость аналогичной проблемы, для которой исходными данными являются всевозможные r -множества над языком A , имеющие нормальное перечислимое условие равенства (соответственно неравенства) и не имеющие разрешимого условия равенства, основа которых есть множество всех слов алфавита A .

Условимся, что каноническим r -множествам p, q, z и u соответствуют в указанном выше смысле r -множества $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{Z}$ и $\mathcal{U}$. Опишем две эффективные операции над каноническими r -множествами, не выводящие за пределы $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

Теорема 1. Пусть p — произвольный $\mathcal{M}_1$ (соответственно $\mathcal{M}_2$)-элемент, a и b — любые слова алфавита A . Существует $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элемент q такой, что $a =_Q b$ и, если хотя бы одно из двух произвольных слов c, d алфавита A не равно a и b в r -множестве $\mathcal{P}$, то $c =_Q d$ тогда и только тогда, когда $c = d$.

Теорема 2. Пусть p — произвольный $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элемент, a — любое слово алфавита A , S — некоторое разрешимое множество слов алфавита A , равных слову a в r -множестве $\mathcal{P}$. Существует $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элемент q , обладающий следующими свойствами: каковы бы ни были слова c и d алфавита A :

- 1) если $c \in S$ и $d \notin S$ или $c \notin S$ и $d \in S$, то $c \neq_Q d$;
- 2) если $c \notin S$ и $d \notin S$, то $c =_Q d$ в том и только том случае, когда $c = d$;
- 3) если $c \in S$ и $d \in S$, то $c =_Q d$.

Из теоремы 1 и результатов ⁽⁴⁾, § 5, следует

Теорема 3. Каковы бы ни были r -множество $\mathcal{B}$ характеристики $\Pi = (\Pi \neq)$ и r -произвольный $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элемент, существует двухэлементное подмножество $\mathcal{N}_1$ ($\mathcal{N}_2$) r -множества $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$), содержащее r и вместе с каждым своим элементом q содержащее каждый элемент r r -множества $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$), что $r =_Q q$ ($r = q$), причем подмножество такое, что невозможен алго-

ризм $\mathcal{F}_1$ над алфавитом $*A$, который перерабатывал бы всякий $\mathcal{N}_1$ ($\mathcal{N}_2$)-элемент q в запись полного расчленяющего сохраняющего равенство отображения r -множества $\mathcal{Q}$ в r -множество $\mathcal{B}$ с тем условием, что равные $\mathcal{N}_1$ ($\mathcal{N}_2$)-элементы перерабатываются в записи равных отображений.

Подмножества $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ могут быть выбраны такими, что r -множества, соответствующие неравным каноническим r -множествам — элементам $\mathcal{N}_1$ (во втором случае $\mathcal{N}_2$), отличаются лишь отношением равенства двух слов алфавита A .

Теорема 4. Если $\mathcal{B}$ — r -множество характеристики $\Pi = (\Pi \neq)$, $\mathcal{F}_2$ — алгоритм над алфавитом $*A$, перерабатывающий всякий $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элемент p в запись полного сохраняющего равенство отображения r -множества $\mathcal{P}$ в r -множество $\mathcal{B}$ с тем условием, что равные $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элементы перерабатываются в равные отображения, то, каков бы ни был $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элемент q , $\langle \mathcal{F}_2(q) \rangle$ — тривиальное отображение.

Фиксируем произвольное r -множество $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{Q}$ — некоторое r -множество. Через $\mathcal{R}[\mathcal{Q}]$ будем обозначать r -множество записей алгоритмов в алфавите $*A^a$, представляющее собой полные отображения r -множества $\mathcal{A}$ в r -множество $\mathcal{Q}$. Два элемента k, l r -множества $\mathcal{R}[\mathcal{Q}]$ считаем равными в том и только том случае, когда для всякого $\mathcal{A}$ -элемента a $\langle k \rangle(a) = \langle l \rangle(a)$.

Теорема 5. Пусть r -множество $\mathcal{A}$ содержит два равных, но графически различных элемента a, b . Невозможен алгоритм $\mathcal{F}_3$ над алфавитом $*A$, перерабатывающий всякий $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элемент p в запись полного сохраняющего равенство отображения r -множества $\mathcal{A}$ в r -множество $\mathcal{P}$ так,

что любые равные $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элементы p и q перерабатываются в равные $\mathcal{R}[Q]$ -элементы, если существует, кроме того, $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элемент s , что

$$\langle \mathcal{F}_3(s) \rangle (a) \neq \langle \mathcal{F}_3(s) \rangle (b).$$

Следствие. Если $\mathcal{F}$ — алгоритм над алфавитом $*A$, перерабатывающий всякую пару элементов p, q r -множества $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$) в запись полного сохраняющего равенство отображения $\mathcal{P}$ в Q , причем так, что фиксирование первого аргумента ⁽⁶⁾ алгоритма $\mathcal{F}$ влечет выполнение для него условий теоремы 5, а фиксирование второго аргумента — теоремы 4, то для всяких $\mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2$)-элементов u, v образы всех $\mathcal{U}$ -элементов при отображении $\langle \mathcal{F}(u, v) \rangle$ графически равны.

Теорема 6. Если $\mathcal{A}$ есть r -множество характеристики $\Pi \neq$, содержащее хотя бы два неравных элемента, невозможен алгоритм $\mathcal{F}_4$ над алфавитом $*A$, перерабатывающий всякий $\mathcal{M}_2$ -элемент p в запись полного расчленяющего отображения r -множества $\mathcal{A}$ в r -множество $\mathcal{P}$, причем так, что любые равные $\mathcal{M}_2$ -элементы p и q перерабатываются в равные $\mathcal{R}[Q]$ -элементы.

Для канонических r -множеств строго класса $\Pi =$ справедливо более сильное утверждение. Заметим, что для всякого Π -перечислимого r -множества $\mathcal{B}$ существует алгоритм над алфавитом $*A$ перерабатывающий всякое каноническое r -множество p строго класса $\Pi =$ в запись полного расчленяющего отображения r -множества $\mathcal{B}$ в r -множество $\mathcal{P}$.

Если к тому же условие равенства в $\mathcal{B}$ разрешимо, то существует алгоритм, перерабатывающий всякое каноническое r -множество p строго класса $\Pi \neq$ в запись полного сохраняющего равенство и расчленяющего отображения $\mathcal{B}$ в $\mathcal{P}$ (см. ⁽⁴⁾, § 5). Эти факты в сравнении с результатами теорем подчеркивают своеобразие свойств отображений r -множеств, сохраняющих равенство. Различие свойств таких алгоритмов и отображений r -множеств отмечается также в (⁽⁴⁾, § 6.15; ⁽⁷⁾). Ниже мы рассматриваем эти вопросы более подробно.

Пусть X — множество слов алфавита A . Через $\bar{X}$ обозначаем дополнение X до множества всех слов алфавита A . Каноническим r -множеством принадлежности X называется всякое каноническое r -множество x в алфавите A , обладающее следующим свойством: каковы бы ни были слова a, b алфавита A , $a = b$ тогда и только тогда, когда $a \sqsubseteq b$ или одновременно $a \in X$ и $b \in X$.

Лемма 1) Для всякого перечислимого, но неразрешимого множества X слов алфавита A существует каноническое r -множество x_1 строго класса $\Pi =$ принадлежности множеству X .

2) Для всякого перечислимого, но неразрешимого множества X слов алфавита A существует каноническое r -множество x_2 строго класса $\Pi \neq$ принадлежности множеству X .

Теорема 7. Невозможен алгоритм $\mathcal{G}_1$ над алфавитом $*A$ такой, что для всякого $\mathcal{M}_1$ -элемента p $!\mathcal{G}_1(p)$, $\mathcal{G}_1(p) \sqsubseteq a * b$, где a и b — слова алфавита A , и $a \neq b$.

Доказательство теоремы использует тот факт, что существует гиперпростое перечислимое множество X слов алфавита A ⁽⁸⁾, и опирается на лемму и теорему 1.

Следствие. Для всякого Π -перечислимого r -множества $\mathcal{B}$, содержащего хотя бы два неравных элемента, невозможен алгоритм $\mathcal{G}$ над алфавитом $*A$ такой, что, каковы бы ни был $\mathcal{M}_1$ -элемент p , $!\mathcal{G}(p)$ и $\langle \mathcal{G}(p) \rangle$ является полным расчленяющим отображением r -множества $\mathcal{B}$ в r -множество $\mathcal{B}$.

Результат теоремы 7 представляет большой интерес для r -множеств $\mathcal{B}$, не содержащих бесконечных перечислимых подмножеств попарно неравных элементов. Если $\mathcal{B}$ содержит такое подмножество, то невозможность алгоритма $\mathcal{G}$ доказывается построением $\mathcal{M}_1$ -элемента p такого, что

невозможно полное расчленяющее отображение $\mathcal{B}$ в $\mathcal{P}$. Поскольку существуют r -множества типа $[P, P=]$, не имеющие разрешимого условия равенства и содержащие бесконечные перечислимые подмножества попарно неравных элементов, предположение о разрешимости массовой проблемы ⁽⁴⁾, § 7, 8, для r -множеств типа $[P, P=]$ опровергается примером.

Теорема 8. *Невозможен алгоритм $\mathcal{G}_2$ над алфавитом $*A$ такой, что для всякого $\mathcal{M}_2$ -элемента $p \in \mathcal{G}_2(p)$, $\mathcal{G}_2(p) \neq a*b$, где a и b — графически различные слова алфавита A , и $a=b$.*

Следствие. Пусть $\mathcal{B}$ — r -множество характеристики $P \neq$, содержащее по крайней мере два равных, но графически различных элемента a, b . Невозможен алгоритм $\mathcal{G}$ над алфавитом $*A$ такой, что всякий $\mathcal{M}_2$ -элемент p перерабатывает в запись полного сохраняющего равенство отображения r -множества $\mathcal{B}$ в r -множество $\mathcal{P}$, при котором образы $\mathcal{B}$ -элементов a и b графически различны.

Усматривается некоторое сходство результатов теоремы 8 и теоремы 5. Доказательство теоремы 8 использует тот факт, что существует простое перечислимое множество X слов алфавита A ⁽⁸⁾, и опирается на лемму и теорему 2. Противоречие в теоремах 7 и 8 извлекается указанием бесконечных перечислимых множеств кортежей или слов алфавита A таких, что всякий кортеж содержит элемент множества $\bar{X}$, и всякое слово (во втором случае) служит элементом множества $\bar{X}$. Построение первого в пересчете кортежа (слова во втором случае) заключается в применении алгоритма, существование которого нами допускается, к каноническому r -множеству принадлежности. Переход от одного этапа к другому в рекурсивном определении алгоритма ⁽⁹⁾, перечисляющего искомое множество, совершается использованием алгоритмов теорем 1 и 2.

Теорема 9. Пусть r -множество $\mathcal{B}$ таково, что множество всех пар его неравных элементов креативно ⁽¹⁰⁾. Невозможен алгоритм $\mathcal{G}_3$ над алфавитом $*A$ такой, что для всякого $\mathcal{M}_2$ -элемента $p \in \mathcal{G}_3(p)$ и $\langle \mathcal{G}_3(p) \rangle$ является полным расчленяющим отображением r -множества $\mathcal{B}$ в $\mathcal{P}$, сохраняющим равенство.

Здесь предположение о существовании алгоритма $\mathcal{G}_3$ приводит к тому, что либо $\mathcal{B}$ имеет разрешимое условие равенства, либо по каждому каноническому r -множеству строго класса $P \neq$ могут быть найдены два равных, но графически различных элемента r -множества, ему соответствующего. Первое противоречит свойствам креативных множеств, второе — теореме 8.

R -множество, множество всех пар неравных элементов которого креативно, построено в ⁽⁴⁾, § 4.5. Другой способ построения такого r -множества содержится в лемме. Выбирая в качестве X произвольное креативное множество, можно построить каноническое r -множество строго класса $P \neq$ принадлежности $\bar{X}$. Нетрудно показать, что множество всех пар неравных элементов r -множества, ему соответствующего, также креативно.

Доказана неразрешимость массовой проблемы ⁽⁴⁾, § 7.8, для r -множеств типа $[P, P \neq]$, имеющих нормальное и неразрешимое условие равенства, следовательно, бесконечных.

Автор выражает искреннюю признательность Н. М. Нагорному В. А. Шурыгину за ценные советы и критические замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Марков, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 67, 8 (1962). ² Н. А. Шанин, там же, т. 52, 226 (1958). ³ В. А. Шурыгин, ДАН, т. 168, № 1, 40 (1966). ⁴ В. А. Шурыгин, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 113, 173 (1970). ⁵ А. А. Марков, там же, т. 42 (1954). ⁶ Г. С. Дейтин, там же, т. 67, 295 (1962). ⁷ Э. С. Орловский, там же, т. 52, 140 (1958). ⁸ В. А. Успенский, Лекции о вычислимых функциях, М., Физматгиз, 1960. ⁹ В. К. Детлов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 52, 75 (1958). ¹⁰ А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М. «Наука», 1965.