

В. Г. ГРОМОВ

ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 27 II 1975)

1. Исследование динамической устойчивости равновесных состояний и закритического поведения гибких термовязкоупругих тел сводится ⁽¹⁾ к задаче об устойчивости нулевого решения нелинейного эволюционного уравнения с затухающей «памятью» для возмущений u вектора смещений

$$\frac{du}{dt} = E_{\lambda_0} u + \int_0^t \mathcal{D}(t, \tau) u(\tau) d\tau + g + F(\lambda, u), \quad u(0) = a; \quad (1)$$

здесь E_{λ_0} , $\mathcal{D}(t, \tau)$ — линейные операторы главной части (зависящие от числовых параметров λ_0 , t , τ); $F(\lambda, u)$ — члены более высокого порядка нелинейного оператора; a , g — возмущения начальных данных и внешних сил из некоторых банаховых пространств, λ — возмущение числового параметра.

В настоящее время имеются единичные работы ⁽²⁾, связанные с применением идей второго метода Ляпунова к исследованию устойчивости решений уравнения вида (1). Ниже развивается и обосновывается первый метод посредством сведения задачи (1) к нелинейному операторному уравнению Вольтерра с последующим его изучением.

2. Вспомогательную вектор-функцию f вводим следующей задачей Коши с постоянным («упругим») оператором E_{λ_0} :

$$\frac{du}{dt} = E_{\lambda_0} u + f, \quad u(0) = a; \quad u = U_{\lambda_0}(t) a + \int_0^t U_{\lambda_0}(t-\tau) f(\tau) d\tau; \quad (2)$$

где $U_{\lambda_0}(t)$ — полугруппа операторов, порожденная E_{λ_0} ⁽³⁻⁵⁾. Удовлетворяя (1), приходим к нелинейному уравнению Вольтерра для f

$$(I - V)f = g + F(\lambda, f), \quad V = \int_0^t \int_\tau^t \mathcal{D}(t, s) U_{\lambda_0}(s-\tau) ds(\cdot) d\tau. \quad (3)$$

Теперь об устойчивости можно судить по поведению решений уравнения (3). Нулевое решение устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\lambda| < \delta$, $\|g\| < \delta$ существует решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $\|f\| < \varepsilon$, $t \geq 0$. Если к тому же $\|f\| \rightarrow 0$ при $\|g\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, то имеет место асимптотическая устойчивость. Итак, изучению подлежат решения уравнения (3). Рассматривая данные задачи как функциональный параметр, только что сформулированные условия устойчивости можно интерпретировать как условия непрерывного продолжения нулевого решения по этому параметру; при этом из устойчивости вытекает существование продолжения на любом конечном интервале времени, в то время как условия асимптотической устойчивости требуют единственности предела продолжения при $t \rightarrow \infty$.

3. Вопрос о продолжении по параметру решений нелинейных операторных уравнений, главная часть которых вырождается на непрерывном либо остаточном спектрах, относится к числу мало разработанных по сравне-

нию со случаем вырождения на точечном спектре (⁽⁶⁾ и др.). Рассмотрим его применительно к нелинейному абстрактному уравнению Вольтерра.

Пусть B — некоторое банахово пространство склеромных вектор-функций, $C(B; [0, T])$, $C(B; [0, \infty])$ — банаховы пространства непрерывных отображений интервала и замкнутой полуоси в B с обычной топологией (⁽³⁻⁵⁾). Рассмотрим уравнение (3) в пространстве $C(B; [0, \infty])$. Начнем с главной части. Ради краткости ядро-оператор в (3) обозначим через $A(t, \tau)$.

Лемма 3.1. *Оператор V действует в пространстве $C(B; [0, T])$ и является квазинильпотентным, если выполнены условия*

$$\int_0^t \|A(t', \tau) - A(t, \tau)\|_B d\tau \rightarrow 0, \quad \int_t^{t'} \|A(t', \tau)\|_B d\tau \rightarrow 0, \quad t' \rightarrow t. \quad (4)$$

Единственная точка спектра $\mu=0$ является точкой остаточного спектра.

Лемма 3.2. *Для того чтобы $Vf \in C(B; [0, \infty])$, достаточно, чтобы*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|A(t, \tau)\|_B d\tau = 0, \quad B\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t A(t, \tau) f_0 d\tau = \Pi f_0, \quad f_0 \in B. \quad (5)$$

Здесь $B\text{-}\lim$ означает предел по норме B -пространства, а оператор Π назовем предельным для V , $0 < t_* < \infty$. Оператор V действует в $C(B; [0, \infty])$ как ограниченный. В дальнейшем условия (4), (5) считаем выполненными.

Как и в скалярном случае, имеет место

Лемма 3.3. *Спектр оператора V представляет собой ограниченное связное множество, содержащее точку нуль.*

Ограниченность спектра вытекает из ограниченности оператора. Остальное является следствием квазинильпотентности V в $C(B; [0, T])$.

Имеет место тесная связь между спектрами операторов V и Π , позволяющая по спектру $\sigma(\Pi)$ судить о спектре $\sigma(V)$.

Лемма 3.4. *Если $\sigma(\Pi)$ является точечным спектром, то*

$$\sigma(\Pi) \subset \sigma(V), \quad r_\sigma(V) = \sup_{\mu \in \sigma(V)} |\mu| = |\mu_0|, \quad (6)$$

где μ_0 — собственное число оператора Π с наибольшим модулем.

Лемма является следствием важного равенства для резольвент операторов V и Π :

$$B\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} V_\mu^{-1} f_0 = \Pi_\mu^{-1} f_0, \quad \mu \in \rho(V), \quad f \in B, \quad (V_\mu = \mu I - V). \quad (7)$$

Лемма 3.5. *Если Π_μ — нормально разрешим в B , то $\sigma(V)$ представляет собой остаточный спектр.*

Это обстоятельство и определяет специфику продолжения решений уравнения (3) по сравнению с теорией ветвления. Прежде всего это касается разрешимости линейного уравнения, расположенного на спектре:

$$V_\mu f = g, \quad g \in C(B; [0, \infty]), \quad \mu \in \sigma(V). \quad (8)$$

Пусть Π_μ — фредгольмов оператор и μ_0 — его n -кратное собственное значение. Обозначим через $N(\Pi)$ и $N^*(\Pi)$ нулевое и дефектное подпространства из B и B^* соответственно, φ_i и γ_i — базисы в них. Укажем биортогональные элементы: $\varphi_i \leftrightarrow \beta_i$, $\psi_i \leftrightarrow \gamma_i$.

Теорема 3.1. *Для того чтобы уравнение (8) было корректно разрешимо в $C(B; [0, \infty])$, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (g, \gamma_i) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (V_{\mu_0}^{-1} g, \beta_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

причем $\sup |b_i| < \infty$.

Скобки, как обычно, означают действие функционалов β_i , γ_i . В случае, когда $\mu \in \sigma(V)$, но $\mu \notin \sigma(\Pi)$, уравнение (8) корректно разрешимо на всей области значений оператора V_μ , хотя последняя по-прежнему не является плотной в пространстве $C(B; [0, \infty])$.

4. Положим $\lambda = \varepsilon$. При $\varepsilon = 0$, $g = 0$ уравнение (3) имеет решение $f = 0$. Ставим вопрос о продолжении по параметру этого решения. Будем говорить, что решение допускает непрерывное продолжение по параметру, если в нуль-окрестности пространства $C(B; [0, \infty])$ найдется элемент $g(t, \varepsilon)$, удовлетворяющий условиям

$$C\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g = 0, \quad t \geq 0, \quad B\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} g = 0, \quad \varepsilon \neq 0, \quad (10)$$

такой, что существует решение $f \in C(B; [0, \infty])$ уравнения (3), подчиненное требованию $C\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f = 0$. $C\text{-}\lim$ означает предел по норме пространства $C(B; [0, \infty])$, т. е. равномерный по t на всей полуоси. Приведенное определение вытекает из понятия устойчивости по Ляпунову. Что касается асимптотической устойчивости, то она будет зависеть от поведения продолжения при $t \rightarrow \infty$. Отличие от классической постановки состоит в том, что наряду с продолжением решения требуется отыскивать продолжения правых частей, на которых оно существует.

Пусть нелинейный оператор F аналитический (*).

Теорема 4.1. Если $\mu = 1 \in \rho(V)$, т. е. принадлежит регулярному множеству главной части, то при любом аналитическом по ε продолжении правой части, удовлетворяющей условиям (10), существует единственное аналитическое продолжение решения уравнения (3), принадлежащее всякий раз одному и тому же множеству предельно-тождественных элементов из $C(B; [0, \infty])$.

Доказательство вытекает из теоремы о неявных функциях.

Смысл теоремы 4.1 состоит в том, что при $\mu \in \rho(V)$ предел продолжений при $t \rightarrow \infty$ однозначно определяется самим уравнением и не зависит от продолжения правых частей, т. е. все продолжения имеют одну и ту же точку сгущения при $t \rightarrow \infty$. Если на правых частях из (10) продолжения имеют более чем одну точку сгущения, то будем говорить о ветвлении точек сгущения. Ясно, что это может быть только при $\mu \in \sigma(V)$.

Пусть $\mu_0 \in \sigma(V)$, $\mu_0 \in \sigma(\Pi)$. В отличие от предыдущего оператор $V_{\mu_0}^{-1}$ является неограниченным на своей области определения. Однако возможна следующая регуляризация.

Лемма 4.1. Оператор

$$\tilde{V}_{\mu_0} = V_{\mu_0} + \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow \infty} (\cdot, \beta_i) \psi_i \quad (11)$$

является оператором регулярного типа на всем пространстве $C(B; [0, \infty])$.

Доказательство леммы опирается на условия корректной разрешимости (9).

Теперь уравнение (3) можно записать эквивалентной системой

$$\tilde{V}_{\mu_0} f = g + \sum_{k=1}^n \xi_k \psi_k + \sum_{i+j \geq 2} F_{ij} \varepsilon^i f^j, \quad \xi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} (f, \beta_k), \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Рассматривая совокупность чисел $\{\varepsilon, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ как параметр, заключаем, что к первому уравнению применима теорема 4.1. Находим его решение

$$f = \sum_1^{\infty} \varepsilon^i \xi^{i_1}, \dots, \xi_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n}, \quad \text{если} \quad g = \sum_1^{\infty} \varepsilon^i \xi^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} g_{i_1 \dots i_n}. \quad (13)$$

Удовлетворяя n скалярным уравнениям из (12), получаем n уравнений относительно $n+1$ неизвестных. Характерным для этой системы будет то, что она не содержит членов первой степени по ξ_k . Это может привести к неединственности ее малых решений как неявных функций ξ_k от ε (уравнения разветвления). Подставляя эти решения в (13), получаем

продолжения правых частей и соответствующие им продолжения решения. Таким образом, приходим к следующему результату:

Теорема 4.2. *Имеет место взаимно однозначное соответствие между малыми решениями уравнений разветвления и точками сгущения при $t \rightarrow \infty$ продолжений решения уравнения (3), причем множество продолжений с одной точкой сгущения реализуется на вполне определенном классе продолжений правой части из (10).*

5. Переход к исходной задаче (1) состоит в переформулировке условий п.п. 3, 4 в терминах операторов E_{λ_0} , $\mathcal{D}(t, \tau)$. Для этого прежде всего подчиним их друг другу с тем, чтобы обеспечить ограниченность оператора $A(t, \tau)$.

Лемма 5.1. *Для выполнения условий леммы 3.1 достаточно*

$$\|U_{\lambda_0}(t)\|_B \leq Me^{\sigma t}, \quad \|\mathcal{D}(t, s)U_{\lambda_0}(s-\tau)\|_B \leq m, \quad 0 \leq \tau < s < t \leq T, \quad (14)$$

и интегрируемости скалярной функции $m(\tau, s, t)$.

Лемма 5.2. *Для справедливости леммы 3.2 необходимо*

$$B\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U_{\lambda_0} f_0 = 0, \quad f_0 \in B. \quad (15)$$

Условия на полугруппу приводят к ограничениям на оператор E_{λ_0} . Он должен быть (³, ⁵) замкнутым с плотной областью определения в B и спектром, расположенным в левой полуплоскости. Именно к такому типу относятся линейные операторы теории упругости, будучи отрицательно определенными, либо ограниченными справа (¹, ⁵). Остальное определяется свойствами по времени оператора $\mathcal{D}(t, \tau)$.

Теорема 5.1. *Если существует предельный оператор Π и его спектр расположен внутри единичного круга, то нулевое решение задачи (1) асимптотически устойчиво. Критическим является случай, когда $\mu_0(\lambda_0) = 1$, μ_0 — собственное число Π с наибольшим модулем. Закритический режим носит аperiодический характер с малым отклонением от нулевого решения на отдельных классах возмущений (асимптотическая дивергенция).*

Теорема 5.1 есть следствие результатов п. 4, ограниченности полугруппы и соотношений (2), (3); $\mu_0(\lambda_0) = 1$ — уравнение критических параметров.

Теорема 5.2. *Если Π не существует, но существует оператор*

$$Q_0 f_0 = B\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\sigma(t-\tau)} \int_{\tau}^t \mathcal{D}(t, s) U_{\lambda_0}(s-\tau) ds f_0 d\tau, \quad \operatorname{Re} \sigma > 0, f_0 \in B, \quad (16)$$

то при $\operatorname{Re} \sigma \geq \sigma_0 > 0$ устойчивости нет:

$$u \in C^{\sigma_0}(B; [0, \infty]): \quad e^{-\sigma_0 t} u \in C(B; [0, \infty]), \quad (17)$$

т. е. возмущения принадлежат пространству растущих функций. Если $\operatorname{Re} \sigma \rightarrow 0$, то для оператора $Q_{i\omega}$, $\omega = \lim \sigma$, имеет место аналог теоремы 5.1.

Уравнение критических параметров принимает вид $\mu_0(\lambda_0, \omega_0) = 1$, а закритические режимы в зависимости от его решений ($\omega_0 \neq 0$) могут носить колебательный характер, вырождающийся в периодический при $t \rightarrow \infty$ (асимптотический флаттер).

Вопросы практического использования метода изложены в (¹).

Ростовский государственный университет

Поступило
22 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Г. Громов, ДАН, т. 220, № 4 (1975) ² В. D. Coleman, V. I. Mizel, Arch. Rational Mech., В. 30, № 3, 173 (1968). ³ Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962. ⁴ К. Йосида, Функциональный анализ, М., «Мир», 1967. ⁵ С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967. ⁶ М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969. ⁷ С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, М.—Л., 1952.