

Н. Н. ГУДОВИЧ

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 6 II 1975)

1°. Конечно-порожденные разностные схемы. Рассмотрим задачу

$$u^{(n)}(t) - f(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) = g(t), \quad a \leq t \leq b; \quad (1,1)$$

$$\varphi_j(u(a), \dots, u^{(n-1)}(a), u(b), \dots, u^{(n-1)}(b)) = \psi_j, \quad j=0, 1, \dots, n-1, \quad (1,2)$$

где $g, \psi = \{\psi_j\}_{j=0}^{n-1}$ — заданные элементы из $C[a, b], R^n$, а $f(t, x_0, \dots, x_{n-1}), \varphi_j(y_0, \dots, y_{n-1}, z_0, \dots, z_{n-1})$ ($f: [a, b] \times R^n \rightarrow R, \varphi_j: R^{2n} \rightarrow R$) — заданные непрерывные по совокупности своих переменных функции.

Введем на $[a, b]$ сетку шага $h = (b-a)/N$ (N натуральное) с узлами $t_i = a + ih, i=0, 1, \dots, N$, и заменим (1,1), (1,2) конечно-порожденной разностной задачей:

$$(\Delta^n u^h)_{i_q} - f(t_{i_q}, (\Delta^0 u^h)_{i_q}, \dots, (\Delta^{n-1} u^h)_{i_q}) = g(t_{i_q}), \quad q=0, 1, \dots, N-n, \quad (1,3)$$

$$\varphi_j((\Delta^0 u^h)_0, \dots, (\Delta^{n-1} u^h)_0, (\Delta^0 u^h)_N, \dots, (\Delta^{n-1} u^h)_N) = \psi_j, \quad j=0, 1, \dots, n-1 \quad (1,4)$$

(определение конечно-порожденности и обозначения см. в (1)).

Пусть $(\bar{\Delta}^m u^h)_i$ есть разностное отношение «вперед» от u^h порядка m в узле t_i :

$$(\bar{\Delta}^m u^h)_i = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j u_{i+j}^h / h^m.$$

Задачи (1,1), (1,2); (1,3), (1,4) мы рассматриваем как уравнения

$$F(u) = (g, \psi); \quad (1,5)$$

$$F^h(u^h) = (g^h, \psi), \quad (1,6)$$

где F, F^h — отображения соответственно из $C^n[a, b]$ в $C[a, b] \times R^n$ и из пространства C_h^n сеточных функций $v^h = \{v_i^h\}_{i=0}^N$ с нормой

$$\|v^h\|_{C_h^n} = \max_{0 \leq m \leq n} \max_{0 \leq i \leq N-m} |(\bar{\Delta}^m v^h)_i| \quad (1,7)$$

в пространство $R^{N-n+1} \times R^n$ всех наборов $(p, \psi) = (\{p_q\}_{q=0}^{N-n}, \{\psi_j\}_{j=0}^{n-1})$ с нормой

$$\|(p, \psi)\|_{R^{N-n+1} \times R^n} = \max \{ \max_q |p_q|, \max_j |\psi_j| \}, \quad (1,8)$$

заданные формулами

$$F(v) = (v^{(n)} - f(t, v, \dots, v^{(n-1)}),$$

$$\{\varphi_j(v(a), \dots, v^{(n-1)}(a), v(b), \dots, v^{(n-1)}(b))\}_{j=0}^{n-1},$$

$$F^h(v^h) = (\{(\Delta^n v^h)_{i_q} - f(t_{i_q}, (\Delta^0 v^h)_{i_q}, \dots)\}_{q=0}^{N-n},$$

$$\{\varphi_j((\Delta^0 v^h)_0, \dots, (\Delta^{n-1} v^h)_N)\}_{j=0}^{n-1},$$

а (g^h, ψ) есть набор $(\{g(t_{i_q})\}_{q=0}^{N-n}, \psi)$.

Пусть $[v]^h, [F(v)]^h$ суть элементы $\{v(t_i)\}_{i=0}^N (\{v^{(n)}(t_i) - f(t_i, v(t_i), \dots, v^{(n-1)}(t_i))\}_{i=0}^N, \{\varphi_j(v(a), \dots, v^{(n-1)}(b))\}_{j=0}^{n-1})$ из $C_h^n, R^{N-n+1} \times R^n$.

Непрерывность f, φ_j и конечно-порожденность задачи (1,3), (1,4) обеспечивают аппроксимацию F отображениями F^h на любом $v \in C^n[a, b]$:

$$\varepsilon(h, v) = \| [F(v)]^h - F^h([v]^h) \|_{R^{N-n+1} \times R^n} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ для } \forall v \in C^n[a, b]. \quad (1,9)$$

Что же касается сходимости решений u^h задачи (1,3), (1,4) к решению u задачи (1,1), (1,2):

$$r(h, u, u^h) = \| [u]^h - u^h \|_{C_h^n} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \quad (1,10)$$

то, как показывают простые примеры, она имеет место не всегда.

Для того чтобы гарантировать существование сходящейся к u последовательности сеточных решений u^h , достаточно подчинить выбор $t_{i^h}, (\Delta^m u^h)_{i^h}, 0 \leq m \leq n, (\Delta^m u^h)_{0, n}, 0 \leq m \leq n-1$, требованию устойчивости семейства $\{F^h\}$ на u в смысле следующего определения.

Определение 1.1. Семейство $\{F^h\}$ устойчиво на $v \in C^n[a, b]$, если существуют $\rho_1, \rho_2 > 0$, не зависящие от h и такие, что при всех $h \leq h_0$ уравнение (1,6) однозначно разрешимо в шаре $S_{\rho_1}([v]^h)$ для любого (g^h, ψ) из шара $S_{\rho_2}(F^h([v]^h))$, и если по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, одно и то же для всех $h \leq h_0$ и такое, что неравенство $\| (g^h, \psi) - (\bar{g}^h, \bar{\psi}) \|_{R^{N-n+1} \times R^n} \leq \delta(\varepsilon)$ для правых частей $(g^h, \psi), (\bar{g}^h, \bar{\psi})$ уравнения (1,8) из $S_{\rho_2}(F^h([v]^h))$ влечет неравенство $\| u^h - \bar{u}^h \|_{C_h^n} \leq \varepsilon$ для соответствующих решений $u^h, \bar{u}^h$ этого уравнения из $S_{\rho_1}([v]^h)$.

Пусть Q_h^n есть определяющий оператор порядка n задачи (1,3), (1,4) (см. (1), п.2°), действующий в пространстве R^{N-n+1} векторов $p = \{p_i\}_{i=0}^{N-n}$ с нормой $\|p\| = \max_i |p_i|$.

2°. Сходимость сеточных решений.

Теорема 2.1. Пусть семейство $\{Q_h^n\}$ устойчиво и пусть при всех $h \leq h_1$ задача (1,3), (1,4) имеет решение u^h в шаре $\bar{S}_\rho([v]^h)$.

Тогда задача (1,1), (1,2) имеет решение u в шаре $\bar{S}_\rho(v)$, и существует подпоследовательность u^h , сходящаяся к u .

Замечание 2.1. Если u — единственное решение (1,1), (1,2) в $S_\rho(v)$, то и вся последовательность u^h сходится к u .

Предположение 2.1. Уравнение (1,5) однозначно разрешимо в шаре $S_\eta(v)$ для любой правой части (g, ψ) из $S_\mu(F(v))$, $\eta, \mu > 0$, и при неограниченном сближении по норме $C[a, b] \times R^n$ правых частей (g, ψ) из $S_\mu(F(v))$ соответствующие решения из $S_\eta(v)$ неограниченно сближаются по норме $C^n[a, b]$.

Теорема 2.2. В предположении 2.1 для устойчивости семейства $\{F^h\}$ на элементе v необходима устойчивость $\{Q_h^n\}$.

Дальнейшие формулировки относятся к случаю, когда существуют непрерывные по совокупности своих переменных частные производные $\partial f / \partial x_m, \partial \varphi_j / \partial y_m, \partial \varphi_j / \partial z_m$.

Предположение 2.2. Линейная краевая задача

$$\begin{aligned} w^{(n)}(t) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_m}(t, v(t), \dots, v^{(n-1)}(t)) w^{(m)}(t) &= g(t), \quad a \leq t \leq b, \\ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_m}(v(a), \dots, v^{(n-1)}(a), v(b), \dots, v^{(n-1)}(b)) w^{(m)}(a) + \\ + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_m}(v(a), \dots) w^{(m)}(b) &= \psi_j, \quad j=0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

однозначно разрешима в $C^n[a, b]$ для любых $g \in C[a, b]$, $\psi = \{\psi_j\} \in R^n$.

Теорема 2.3. В предположении 2.2 для устойчивости семейства $\{F^n\}$ на v необходима и достаточна устойчивость $\{Q_h^n\}$.

Обозначим через $DE_{[v]^h}^h$ производную Фреше отображения F^h в точке $[v]^h \in C_h^n$.

Замечание 2.2. Пусть предположение 2.2 справедливо и семейство $\{Q_h^n\}$ устойчиво. Тогда существующее в силу теоремы 2.3 обратное отображение $(F^h)^{-1}$ удовлетворяет на шарах $S_\rho(F^h[v]^h)$ ($0 < \rho \leq \rho_2$; ρ_2 из определения 1.1) при $h \leq \tau$ условие Липшица с константой $K(\tau, v)/(1 - \kappa(\rho))$, где $\kappa(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, а

$$K(\tau, v) = \sup_{h \leq \tau} \|(DF_{[v]^h}^h)^{-1}\|_{R^{N-n+1} \times R^n \rightarrow C_h^n}; \quad (2,1)$$

при этом существование $(DF_{[v]^h}^h)^{-1}$ и конечность $K(\tau, v)$ следуют из теоремы 3.1 работы (1).

Теорема 2.4. Пусть u — решение (1,1), (1,2), пусть предположение 2.2 справедливо для $v = u$ и пусть семейство $\{Q_h^n\}$ устойчиво.

Тогда найдется сходящаяся к u последовательность решений u^h задачи (1,3), (1,4), для которой погрешности $r(h, u, u^h)$, $\varepsilon(h, u)$ (см. (1,9), (1,10)) удовлетворяют условию

$$\sup r(h, u, u^h) / \varepsilon(h, u) \leq K(\tau, u) + \lambda(\tau, u), \quad (2,2)$$

где $K(\tau, u)$ — константа (2,1), а $\lambda(\tau, u) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$.

Замечание 2.3. Оценка (2,2) дает сходимость u^h к u с порядком погрешности аппроксимации $\varepsilon(h, u)$.

3°. Метод блочной аппроксимации. Для построения системы (1,3), заведомо удовлетворяющей условию устойчивости $\{Q_h^n\}$, можно воспользоваться методом блочной аппроксимации. Именно, задаемся натуральными $M(h)$, $k(r, h)$, $r = 0, 1, \dots, M(h) - 1$, так, чтобы $\sum_r k(r, h) = N - n + 1$, и разбиваем массив $t_0, t_1, \dots, t_{N-n}$ на непересекающиеся блоки $T_r = \{t_{\alpha(r)}, t_{\alpha(r)+1}, \dots, t_{\alpha(r)+k(r, h)-1}\}$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(r) = \sum_{j \leq r-1} k(j, h)$ при $r \geq 1$, из $k(r, h)$ соседних узлов каждый.

Выбираем целые $i(r, p, h)$, $p = 0, 1, \dots, k(r, h) - 1$; $0 \leq i(r, p, h) \leq N$, и аппроксимируем (1,1) в узлах $t_{i(r, p, h)}$ уравнениями

$$(\Delta^n u^h)_{i(r, p, h)} - f(t_{i(r, p, h)}, (\Delta^0 u^h)_{i(r, p, h)}, \dots) = g(t_{i(r, p, h)}), \quad p = 0, 1, \dots, k(r, h) - 1; \quad (3,1)$$

объединение таких подсистем по r и принимаем в качестве (1,3).

Выбор $(\Delta^n u^h)_{i(r, p, h)}$ в полученной системе (1,3) подчиняем требованию конечно-порожденности и трем дополнительным условиям:

а) $(\Delta^n u^h)_{i(r, p, h)}$ линейно выражаются через разностные отношения «вперед» порядка n в узлах блока T_r :

$$(\Delta^n u^h)_{i(r, p, h)} = \sum_{j=0}^{k(r, h)-1} e_j(r, p, h) (\bar{\Delta}^n u^h)_{\alpha(r)+j}, \quad (3,2)$$

$e_j(r, p, h)$ не зависит от u^h (ср. с формулой (2,1) из (1));

б) выражения $(\Delta^n u^h)_{i(r, p, h)}$ при r, h фиксированных и $p = 0, 1, \dots, k(r, h) - 1$ линейно независимы в том смысле, что $(k(r, h) \times k(r, h))$ -матрица

$$Q_{r, h} = (q_{pj}) = (e_j(r, p, h)), \quad (3,3)$$

p -я строка которой составлена из коэффициентов $e_j(r, p, h)$ разложения (3,2), обратима;

в) матрицы $Q_{r,h}^n$, $r=0, 1, \dots, M(h)-1$, могут быть одновременно включены в какое-либо конечное и не зависящее от h множество числовых матриц.

На выбор $(\Delta^m u^h)_{i(r,p,h)}$ при $m \leq n-1$ никаких ограничений, кроме требования конечно-порожденности, не накладываем.

Теорема 3.1. *Метод блочной аппроксимации приводит к системе (1,3) с устойчивым семейством $\{Q_h^n\}$.*

Простейший способ выбора $(\Delta^h u^h)_i$ с соблюдением требований а) — в) для любого n и любого наперед заданного порядка аппроксимации k указан в ⁽¹⁾.

4°. Схемы локальной структуры. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} (\bar{\Delta}^n u^h)_\alpha - \sum_{j=0}^{c(\alpha,h)} b_j(\alpha, h) f(t_{i(\alpha,h)}, (\Delta^0 u^h)_{i(\alpha,h)}, \dots) = \\ = \sum_{j=0}^{c(\alpha,h)} b_j(\alpha, h) g(t_{i(\alpha,h)}), \quad \alpha=0, 1, \dots, N-n; \end{aligned} \quad (4,1)$$

здесь $c(\alpha, h)$, $i(\alpha, h)$ — целые, $0 \leq c(\alpha, h)$; $0 \leq i(\alpha, h) \leq N$; $(\Delta^m u^h)_{i(\alpha,h)}$, $0 \leq m \leq n-1$, — разностные аппроксимации для m -й производной в узле $t_{i(\alpha,h)}$, удовлетворяющие требованию конечно-порожденности, и $b_j(\alpha, h)$ — числовые коэффициенты, удовлетворяющие равенствам

$$\sum_{j=0}^{c(\alpha,h)} b_j(\alpha, h) = 1; \quad (4,2)$$

при этом на выбор $c(\alpha, h)$, $i(\alpha, h)$, $b_j(\alpha, h)$ накладываются следующие дополнительные ограничения типа требования конечно-порожденности:

1) существуют не зависящие от α, h константы C_1, C_2 такие, что

$$c(\alpha, h) \leq C_1, \quad |i(\alpha, h) - \alpha| \leq C_2;$$

2) наборы $\{b_j(\alpha, h)\}_{j=0}^{c(\alpha,h)}$ могут быть включены в некоторое конечное и не зависящее от h множество числовых наборов.

Задачу (4,1), (1,4) с системой (4,1), удовлетворяющей перечисленным выше требованиям, назовем разностной задачей локальной структуры.

Задачи локальной структуры возникают как естественное обобщение разностных задач, получаемых методом блочной аппроксимации. Сведение (3,1) к (4,1) осуществляется подстановкой (3,2) в (3,1) и применением к обеим частям полученной системы матрицы, обратной к (3,3); при этом справедливость (4,2) следует из формул (2,1), (2,5) работы ⁽¹⁾.

Теорема 4.1. *Пусть (4,1), (1,4) есть задача локальной структуры и пусть при всех $h \leq h_2$ эта задача имеет решение u^h в $\bar{S}_0([v]^h)$.*

Тогда (4,1), (1,2) имеет решение u в $\bar{S}_0(v)$, и существует подпоследовательность u^h , сходящаяся к u .

Теорема 4.2. *Пусть (4,1), (1,4) — задача локальной структуры пусть u — решение (1,1), (1,2) и пусть предположение 2,5 справедливо для $v=u$.*

Тогда найдется последовательность решений задачи (4,1), (1,4), сходящаяся к u с порядком погрешности аппроксимации.

При $n=1$ в класс задач локальной структуры попадают задачи, основанные на методе Адамса и его видоизменениях, предложенных в ⁽²⁾.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступил
7 I 197

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Гудович, ДАН, т. 217, № 2, 264 (1974). ² Э. Вигасек, Сб. Применения функциональных методов к краевым задачам математической физики, Новосибирск 1972, стр. 25.