

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, И. Ф. КУШНИРЧУК

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. В пространстве $A(G)$ аналитических в области $G = G_1 \times \dots \times G_n$ функций $f(z_1, \dots, z_n)$ рассмотрим дифференциальный оператор с частными производными

$$L = L_1 L_2 \dots L_n = z^\mu D_z^\mu + \dots, \quad (1)$$

где

$$L_k = z_k^{m_k} D_k^{m_k} + P_{k,1}(z_k) D_k^{m_k-1} + \dots + P_{k,m_k-1}(z_k) D_k + P_{k,m_k}(z_k) \cdot I, \quad (2)$$

$$D_k = d/dz_k, \quad k=1, \dots, n, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in G,$$

$$\mu = (m_1, \dots, m_n), \quad z^\mu = z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \quad D_z^\mu = D_1^{m_1} \dots D_n^{m_n}.$$

Предположим, что G_k является образом круга $C_{R_k} = \{w_k: |w_k| < R_k \leq \pi\}$ при взаимно однозначном и конформном отображении $z_k = \exp w_k$. Обозначим еще через A_{R_k} и $A(G_k)$ пространства аналитических соответственно в круге C_{R_k} и области G_k функций, а через $V_k: A(G_k) \rightarrow A_{R_k}$ — взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение, действующее на любую функцию $f(z_k) \in A(G_k)$ по формуле

$$V_k f(z_k) = f(\exp w_k) = g(w_k), \quad k=1, \dots, n.$$

Тогда справедлива

Л е м м а. С помощью изоморфизма V_k оператор L_k преобразуется в оператор

$$M_k = D_k^{m_k} + q_{k,1}(w_k) D_k^{m_k-1} + \dots + q_{k,m_k-1}(w_k) D_k + q_{k,m_k}(w_k) \cdot I,$$

где $D_k = d/dw_k$, $q_{k,j}(w_k) \in A_{R_k}$, $j=1, 2, \dots, m_k$, т. е. выполняется равенство

$$V_k L_k = M_k V_k. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, имеем

$$D_k^r g(w_k) = \sum_{s=1}^r a_{r,s} \exp(sw_k) D_k^s f(\exp w_k), \quad r=1, 2, \dots, m_k, \quad (4)$$

где

$$a_{r,s} = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \frac{(s-i)^r}{i! (s-i)!}, \quad s=1, 2, \dots, r; \quad a_{rr}=1.$$

Из первых m_k-1 уравнений (4) находим

$$D_k^r f(\exp w_k) = \exp(-rw_k) \sum_{s=1}^k b_{r,s} D_k^s g(w_k), \quad r=1, \dots, m_k-1, \quad (5)$$

а из последнего уравнения (4)

$$\exp(m_k w_k) D_k^{m_k} f(\exp w_k) = \sum_{s=1}^{m_k} b_{m_k,s} D_k^s g(w_k), \quad (6)$$

где $b_{r,s}$, $s=1, 2, \dots, r$; $r=1, 2, \dots, m_k$, — определенные постоянные, причем $b_{m_k, m_k}=1$.

Умножая равенства (5) на $P_{k, m_k-r}(\exp w_k)$ и складывая почленно полученные результаты с равенством (6), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \exp(m_k w_k) D_k^{m_k} f(\exp w_k) + \sum_{r=0}^{m_k-1} P_{k, m_k-r}(\exp w_k) D_k^r f(\exp w_k) = \\ = \sum_{r=1}^{m_k} \exp(-r w_k) P_{k, m_k-r}(\exp w_k) \sum_{s=1}^r b_{r,s} D_k^s g(w_k) + \\ + P_{k, m_k}(\exp w_k) g(w_k) = \sum_{s=0}^{m_k} q_{k, m_k-s}(w_k) D_k^s g(w_k), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$q_{k, m_k-s}(w_k) = \sum_{r=s}^{m_k} b_{r,s} \exp(-r w_k) P_{k, m_k-r}(\exp w_k), \quad s=1, 2, \dots, m_k, \quad (8)$$

$$P_{k, 0}(\exp w_k) = \exp(m_k w_k), \quad q_{k, m_k}(w_k) = P_{k, m_k}(\exp w_k).$$

Но левая часть равенства (8) равна $V_k L_k f(z_k)$, а правая его часть является результатом действия оператора M_k на функцию $g(w_k) = V_k f(z_k)$. Таким образом, справедливость равенства (3) установлена.

Теорема 1. *Существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение $T_k: A(G_k) \rightarrow A_{Rk}$, удовлетворяющее равенству*

$$T_k L_k = D_k^{m_k} T_k. \quad (9)$$

Доказательство. Известно (см. (1, 2)), что оператор M_k со старшим коэффициентом, равным единице, линейно эквивалентен в A_{Rk} оператору m_k -кратного дифференцирования $D_k^{m_k} = d^{m_k}/dw_k^{m_k}$, т. е. существует изоморфизм U_k пространства A_{Rk} на себя, для которого выполняется равенство

$$U_k M_k = D_k^{m_k} U_k. \quad (10)$$

Умножая каждую часть равенства (3) слева на U_k и используя (10), получим $U_k V_k L_k = U_k M_k V_k = D_k^{m_k} U_k V_k$. Обозначая здесь $U_k V_k$ через T_k , приходим к равенству (9).

2. Условимся обозначать собственную функцию оператора L_k , соответствующую собственному значению $\lambda_k^{m_k}$, через $\varphi_k(z_k; \lambda_k)$; т. е. $\varphi_k(z_k; \lambda_k)$ является ненулевым решением уравнения $L_k \varphi_k = \lambda_k^{m_k} \varphi_k$. В следующей теореме устанавливается существование собственных функций оператора L .

Теорема 2. *При любом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in C^{(n)}$ собственная функция $\varphi(z, \lambda)$ оператора L , соответствующая собственному значению $\lambda^u = \lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_n^{m_n}$, выражается формулой*

$$\varphi(z; \lambda) = \varphi_1(z_1; \lambda_1) \dots \varphi_n(z_n; \lambda_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(z_k; \lambda_k). \quad (11)$$

Доказательство. Так как

$$D_k^{m_k} \{ \exp(\varepsilon_{jk} \lambda_k w_k) \} = \lambda_k^{m_k} \exp(\varepsilon_{jk} \lambda_k w_k),$$

где $\varepsilon_{jk} = 1^{1/m_k}$, $j=1, 2, \dots, m_k$, то собственными функциями $\psi_k(w_k; \lambda_k)$ оператора $D_k^{m_k}$ является любая нетривиальная линейная комбинация вида

$$\psi(w_k; \lambda_k) = \sum_{j=1}^{m_k} B_{kj} \exp(\varepsilon_{jk} \lambda_k w_k).$$

Пусть $\varphi(z_k; \lambda_k) = T_k^{-1} \psi_k(w_k; \lambda_k)$. Перепишем равенство (9) в равносильной форме $L_k T_k^{-1} = T_k^{-1} D_k^{m_k}$, на основании которой находим

$$L_k \varphi_k(z_k; \lambda_k) = T_k^{-1} D_k^{m_k} \psi_k(w_k; \lambda_k) = T_k^{-1} \{\lambda_k^{m_k} \psi_k(w_k; \lambda_k)\} = \lambda_k^{m_k} \varphi_k(z_k; \lambda_k)$$

т. е. функция $\varphi_k(z_k; \lambda_k)$ является собственной для оператора L_k . А так как операторы L_k (если их рассматривать в пространстве $A(G)$) попарно коммутируют, то произведение (11) является собственной функцией оператора L , которая соответствует собственному значению λ^μ .

З а м е ч а н и е 1. Предположим, что функция $\psi_k(w_k; \lambda_k)$ найдена по некоторым начальным условиям в точке $w_k=0$:

$$D_k^r \psi_k(w_k; \lambda_k) |_{w_k=0} = C_{r,k}, \quad r=0, 1, \dots, m_k-1. \quad (12)$$

Тогда соответствующая функция $\varphi_k(z_k; \lambda_k)$ удовлетворяет при $z_k=1$ начальным условиям

$$\varphi_k(1; \lambda_k) = C_{0,k}, \quad D_k^r \varphi_k(z_k; \lambda_k) |_{z_k=1} = \sum_{s=1}^r b_{r,s} C_{s,k}. \quad (13)$$

В частности, если

$$C_{r,k} = \lambda_k^r, \quad r=0, 1, \dots, m_k-1, \quad (14)$$

то $\psi_k(w_k; \lambda_k) = \exp(\lambda_k w_k)$, а соответствующая функция $\varphi_k(z_k; \lambda_k)$ находится из условий

$$\varphi_k(1; \lambda_k) = 1; \quad D_k^r \varphi_k(z_k; \lambda_k) |_{z_k=1} = \sum_{s=1}^r b_{r,s} \lambda_k^s, \quad r=1, \dots, m_k-1. \quad (15)$$

3. Пусть $\{\lambda_\sigma = (\lambda_{1,s_1}, \dots, \lambda_{n,s_n})\}_\sigma$, $s_k=1, 2, \dots$; $k=1, 2, \dots, n$, — произвольная последовательность элементов $\mathbb{C}^n$. Тогда справедлива

Теорема 3. Для того чтобы система $\{\varphi(z; \lambda_\sigma)\}_\sigma$ собственных функций оператора L была полной в пространстве $A(G) = A(G_R)$, необходимо и достаточно, чтобы каждая система $\{\psi_k(w_k; \lambda_{k,s_k})\}_{s_k=1}^\infty$ собственных функций операторов $D_k^{m_k}$ была полной в пространстве A_{R_k} , $R = (R_1, \dots, R_n)$.

Доказательство. Так как оператор L_k с помощью изоморфизма T_k преобразуется в оператор $D_k^{m_k}$, то система $\{\varphi_k(z_k; \lambda_{k,s_k})\}$ полна в $A(G_k)$ тогда и только тогда, когда полной в A_{R_k} является система $\{\psi_k(w_k; \lambda_{k,s_k})\}$ (в предположении, что соответствующие функции удовлетворяют в точках $z_k=1$ и $w_k=0$ начальным условиям вида (12) и (13)). Но на основании теоремы 2 необходимым и достаточным условием полноты системы $\{\varphi(z; \lambda_\sigma)\}_\sigma$ в $A(G)$ является (см. (3)) полнота каждой системы $\{\varphi_k(z_k; \lambda_{k,s_k})\}$ в пространстве $A(G_k)$, $k=1, 2, \dots, n$.

Если использовать условия вида (14) для определения собственных функций оператора $D_k^{m_k}$, то получим систему экспонент $\{\exp(\lambda_{k,s_k} w_k)\}_{s_k=1}^\infty$, для полноты которой имеется ряд достаточных условий (см. (3-7)). Используя, например, теорему Пз из (4), на основании теоремы 3 получим

С л е д с т в и е 1. Пусть $\{\lambda_\sigma = (\lambda_{1,s_1}, \dots, \lambda_{n,s_n})\}_\sigma$ — последовательность из $\mathbb{C}^n$ и

$$\alpha_k = \overline{\lim_{s_k \rightarrow \infty}} \frac{\ln s_k}{\ln |\lambda_{k,s_k}|}, \quad \beta_k = \overline{\lim_{s_k \rightarrow \infty}} \frac{s_k}{|\lambda_{k,s_k}|}, \quad k=1, \dots, n.$$

Тогда система $\{\varphi(z; \lambda_\sigma)\}_\sigma$ полна в пространстве $A(G_R)$ при $\alpha_k > 1$, $k=1, 2, \dots, n$, для любых $R_k \leq \pi$ или при $\alpha_k = 1$, $k=1, \dots, n$, для любых $R_k \leq \min \{\pi, \beta_k/e\}$.

Пусть последовательность $\{\lambda_\sigma\}_\sigma \subset \mathbb{C}^n$ такова, что $\operatorname{Re} \lambda_{k,s_k} > 0$ при $k=1, \dots, n$. Обозначим через $v_k(r)$ число точек $\{\lambda_{k,s_k}\}$ в круге $|z-r/2| <$

$< r/2$; $d_k = \lim_{r \rightarrow \infty} [v_k(r)/r]$. Если воспользоваться теоремой 20 из (6) о полноте

системы экспонент в горизонтальных полосах, то получим

Следствие 2. Система $\{\varphi(z; \lambda_\sigma)\}_\sigma$ полна в каждом пространстве $A(G_R)$, если только $R_k < \pi \min \{1, d_k\}$, $k=1, 2, \dots, n$.

Замечание 2. Область G_k плоскости z_k ограничена кривой $z_k = e^{u_k} (\cos \vartheta_k + i \sin \vartheta_k)$, $|w_k|^2 = u_k^2 + v_k^2 = R_k^2$, симметричной относительно действительной оси и пересекающей ее в точках e^{-R_k} и e^{R_k} , $R_k \leq \pi$. Можно проверить, что круг $B_{R_k} = \{z_k: |z_k - \operatorname{ch} R_k| < \operatorname{sh} R_k\}$, $0 < R_k \leq \pi$, содержится в области G_k . На основании этого можно получить условия полноты системы $\{\varphi(z; \lambda_\sigma)\}_\sigma$ в полицилиндрических областях $B_R = B_{R_1} \times B_{R_2} \times \dots \times B_{R_n}$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
30 IX 1974

Черновицкий государственный университет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. К. Фазе, Сб.: Исследов. по соврем. теории функции комплекс. переменного, М., 1961, стр. 468. ² К. М. Фишман, Матем. сб., т. 68, № 1, 63 (1965). ³ С. А. Еремин, Некоторые вопросы приближения функций многих комплексных переменных, Киев, Изд. АН УССР, 1958. ⁴ А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, «Наука», М., 1968. ⁵ И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, М., «Наука», 1971. ⁶ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.