

УДК 550.31

ГЕОФИЗИКА

Академик АН КазССР Ж. С. ЕРЖАНОВ, А. А. КАЛЫБАЕВ

## О НАПРАВЛЕНИИ И СКОРОСТИ ВЕКОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНЫХ ПОЛЮСОВ

Земля вращается около центра масс, подчиняясь закону об изменении кинетического момента **D**. При прецессионных и нутационных движениях, вызванных внешними силами, она ведет себя как тело, жестко связанное с осью вращения <sup>(1)</sup>. Вековое движение полюсов есть следствие перемещения самой Земли по отношению к собственной оси вращения, которая в отсутствие внешних сил (**D**=const) сохраняет ориентацию в пространстве. Существование векового движения земных полюсов установлено по астрономическим наблюдениям <sup>(2)</sup>, динамически возможный ее механизм построен в <sup>(3)</sup>. Рассмотрим параметры этого движения.

При несовпадении оси вращения Земли с динамической осью, являющейся осью наибольшего главного момента инерции для центра масс, возникает гироскопический момент. Под его действием динамическая ось смещается вместе с телом Земли в направлении вектора **D**, вызывая дрейф полюсов <sup>(3)</sup>.

Введем системы главных осей  $Z=(z_1, z_2, z_3)$  и земную  $X=(x_1, x_2, x_3)$ . Обе системы декартовы и имеют общее начало в центре *O* масс, причем  $z_3$  — динамическая ось,  $x_3$  — ось вращения  $\omega$  Земли. Пусть  $L$  — линия узлов,  $\varphi=(L, x_1)$ ,  $\psi=(L, z_2)$ ,  $\gamma=(x_3, z_3)$  — углы Эйлера;  $\rho$  — плотность,  $V$  — объем Земли;  $A_1, A_2, A_3$  — осевые,  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$  — центробежные моменты инерции Земли в системе  $X$ , причем

$$A_1 = \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) dV, \quad A_{12} = \int_V \rho x_1 x_2 dV, \quad \alpha_{ij} = \cos(x_i, z_j), \quad i, j=1, 2, 3.$$

Главные моменты  $C_1, C_2, C_3$  являются корнями характеристического уравнения <sup>(4)</sup>

$$\lambda^3 - (A_1 + A_2 + A_3)\lambda^2 + (A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3 - A_{12}^2 - A_{13}^2 - A_{23}^2)\lambda - A_1 A_2 A_3 + 2A_{12} A_{13} A_{23} + A_1 A_{23}^2 + A_2 A_{13}^2 + A_3 A_{12}^2 = 0. \quad (1)$$

Величины  $\alpha_{i3}$ , определяющие направление оси  $z_3$  в системе  $X$ , связаны с углами Эйлера соотношениями

$$\alpha_3 = -\cos \varphi \sin \gamma, \quad \alpha_{23} = \sin \varphi \sin \gamma, \quad \alpha_{33} = \cos \gamma \quad (2)$$

и определяются из уравнений

$$\begin{aligned} (A_1 - C_3)\alpha_{13} - A_{12}\alpha_{23} - A_{13}\alpha_{33} &= 0, \\ -A_{12}\alpha_{13} + (A_2 - C_3)\alpha_{23} - A_{23}\alpha_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) после подстановки в нее (2) дает

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_{12}A_{13} + A_{23}(A_1 - C_3)}{A_{12}A_{23} + A_{13}(A_2 - C_3)}, \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{A_{23}(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}}{A_{12} + (A_2 - C_3)\operatorname{tg} \varphi} \end{aligned} \quad (4)$$

Моменты, фигурирующие в (4), связаны с коэффициентами разложения геопотенциала в ряд сферических функций

$$V_c = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n P_{nm}(\cos \theta) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \right\} \quad (5)$$

посредством соотношений <sup>(5)</sup>

$$A_3 - \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = Ma^2 J_2, \quad A_2 - A_1 = 4Ma^2 C_{22}, \quad (6)$$

$$A_{12} = 2Ma^2 S_{22}, \quad A_{13} = Ma^2 C_{21}, \quad A_{23} = Ma^2 S_{21},$$

где  $G$  — постоянная гравитации,  $M$  — масса,  $a$  — экваториальный радиус Земли.

Присоединяя к уравнениям (6) выражение динамического сжатия <sup>(6)</sup>

$$H = \frac{A_3 - \frac{1}{2}(A_1 + A_2)}{A_3}, \quad (7)$$

получим полную систему уравнений для осевых и центробежных моментов.

Гармоники  $J_n$ ,  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  разложения (5), выражающие возмущение орбит спутников, вызванные гравитационным полем Земли, определены до 21 порядка полностью и до 22 — частично <sup>(7)</sup>, причем

$$J_2 = 1,082628 \cdot 10^{-3}, \quad C_{22} = 2,4129 \cdot 10^{-6}, \quad S_{22} = -1,3641 \cdot 10^{-6}. \quad (8)$$

Точность определения этих гармоник составляет 1% <sup>(8)</sup>. Величина  $H$  определяется из астрономических наблюдений с еще большей точностью <sup>(8)</sup>:

$$H = 0,00327364. \quad (9)$$

Коэффициенты  $C_{21}$  и  $S_{21}$  обычно приравнивают нулю, по-видимому, из-за малости в сравнении с другими гармониками <sup>(7, 9)</sup>. Поэтому численные их значения найдем из эмпирического закона для гармоник геопотенциала

$$\sigma_n^2 = f(n) \sum_m (C_{nm}^2 + S_{nm}^2) = 10^{-7}/n, \quad (10)$$

представив функцию  $f(n)$  в виде многочлена Ньютона. Выражение (10) является аналитическим продолжением эмпирического закона, полученного в (7) для гармоник  $n \geq 6$ .

Учитывая, что гармоники  $C_{21}$  и  $S_{21}$  порождают возмущения орбит искусственных спутников, равные соответственно 10 и 29 м <sup>(10)</sup>, свяжем их дополнительным условием  $S_{21} = 2,9 C_{21}$ . Этим гармоникам следует приписать знак минус, ибо они попадают в один сектор с известной гармоникой  $S_{22}$  <sup>(9)</sup>. Тогда, пользуясь (10), найдем

$$C_{21} = -0,001196 \cdot 10^{-6}, \quad S_{21} = -0,003466 \cdot 10^{-6}. \quad (11)$$

Подставляя значения (8), (9) и (11) в выражения моментов (6) и сжатия (7), будем иметь (в единицах г·см<sup>2</sup>)

$$\begin{aligned} A_1 &= 8,012155770 \cdot 10^{44}, & A_2 &= 8,012390409 \cdot 10^{44}, \\ A_3 &= 8,039883289 \cdot 10^{44}, & A_{12} &= -0,6632505 \cdot 10^{40}, \\ A_{13} &= -0,25526468 \cdot 10^{37}, & A_{23} &= -0,74148308 \cdot 10^{37}. \end{aligned}$$

Характеристические уравнения (1) имеют корни (в г·см<sup>2</sup>)

$$C_1 = 8,01170404 \cdot 10^{44}, \quad C_2 = 8,012855055 \cdot 10^{44}, \\ C_3 = 8,039870 \cdot 10^{44}.$$

Тогда из выражений (4) имеем

$$\varphi = -71,0446, \quad \gamma = -0,00016$$

и расстояние между полюсами составляет 18,21 м.

Введем инерциальную систему отсчета  $Y = (y_1, y_2, y_3)$  с осью  $y_3$ , направленной по вектору  $\mathbf{D}$ , две другие оси лежат в перпендикулярной ему плоскости. Через  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  обозначим систему углов Эйлера таких, что  $\tau_1 = (N, y_1)$ ,  $\tau_2 = (N, z_1)$  и  $\tau_3 = (y_3, z_3)$ , где  $N$  — линия узлов (пересечения) координатных плоскостей  $(y_1 y_2)$ ,  $(z_1 z_2)$ .

Следует отметить, что векторы  $\mathbf{D}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  не совпадают, ибо в системе  $X$  они не коллинеарны:

$$\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}, \quad \mathbf{D} = \{-A_{13}\omega, -A_{23}\omega, A_3\omega\}. \quad (12)$$

Положительным направлением линии  $N$  объявим направление вектора

$$\boldsymbol{\omega}_z = \mathbf{D} \times \mathbf{z}_3. \quad (13)$$

Раскладывая гироскопический момент  $\mathbf{Q}$  вращения Земли по осям  $y_3$ ,  $z_3$ , линии  $N$  и сравнивая полученные величины, нетрудно убедиться в том, что по сравнению с составляющей  $Q_N$ , соответствующей линии  $N$ , две другие очень малы, что ими можно пренебречь. Составляющая  $Q_N$ , антипараллельная вектору  $\boldsymbol{\omega}_z$ , обуславливает вращение Земли и вместе с ней оси  $z_3$  до полного совмещения с  $\mathbf{D}$ . Очевидно, угловая скорость  $\omega_y$  указанного движения

$$\omega_y = \omega \cos(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_z)$$

и выражает скорость изменения угла Эйлера  $\tau_3$ .

Найдем эту скорость и сравним ее с астрономическими данными Международной службы движения полюсов. На основании (2), (12) и (13) получим

$$\omega_y = \frac{(A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi) \sin \gamma}{T}, \quad (14)$$

где

$$T = [(A_3 \sin \varphi \sin \gamma + A_{23} \cos \gamma)^2 + (A_3 \cos \varphi \sin \gamma - A_{13} \cos \gamma)^2 + \\ + (A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi)^2 \cdot \sin^2 \gamma] \cdot \omega. \quad (15)$$

Подставляя в (14) выражение (15), величины углов  $\varphi, \gamma$  и угловой скорости вращения Земли  $\omega = 7,29211508 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$  <sup>(11)</sup>, получим  $\omega_y = 5,116667904 \cdot 10^{-16} \text{ сек}^{-1}$ , что соответствует линейной скорости 102,57 мм/год. Направление этого движения определяется направлением вектора  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{D}$  в системе  $X$ :

$$\begin{aligned} e_1 &= \{e_1 = A_3(A_3 \cos \varphi \sin \gamma - A_{13} \cos \gamma) + A_{23}(A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi) \sin \gamma, \\ e_2 &= -A_3(A_3 \sin \varphi \sin \gamma + A_{23} \cos \gamma) - A_{13}(A_{23} \cos \varphi + A_{13} \sin \varphi) \sin \gamma, \\ e_3 &= A_{13}(A_3 \cos \varphi \sin \gamma - A_{13} \cos \gamma) + A_{23}(A_3 \sin \varphi \sin \gamma + A_{23} \cos \gamma)\} \omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Координатная плоскость  $(x_1, x_3)$  земной системы  $X$ , по отношению к которой определены моменты  $A_i, A_{ij}$  инерции Земли и ведутся исследования, совпадает с плоскостью гринвичского меридиана 1900—1905 гг. Следовательно, из выражения (16) непосредственно определяется «долгота» направления движения полюсов

$$\lambda_a = -\operatorname{arctg} \frac{e_2}{e_1}.$$

Так как  $e_2/e_1 = -0,0032483$ , то расчетное направление движения составляет  $\lambda_a = 71^\circ, 04$  з.д.

Полученные величины  $\omega_y = 5,116667904 \cdot 10^{-16}$  сек $^{-1}$  и  $\lambda_a = 71^\circ, 04$  западной долготы близки к наблюдаемым: вековое движение, определенное за промежуток времени 1901—1968 гг., составляло в среднем 102 мм/год (т. е.  $5,08802706 \cdot 10^{-16}$  сек $^{-1}$ ) по направлению  $76^\circ$  западной долготы  $(^2)$ .

Институт математики и механики  
Академии наук КазССР  
Алма-Ата

Поступило  
16 XII 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Э. Вулард, Теория вращения Земли вокруг центра масс, М., Физматгиз, 1963.  
<sup>2</sup> А. А. Михайлов, Астрономический журн., т. 48, в. 6, 1301 (1971). <sup>3</sup> Ж. С. Ержанов,  
А. А. Калыбаев, Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем., № 3, 33 (1974). <sup>4</sup> М. А. Айзер-  
ман, Классическая механика, «Наука», 1974. <sup>5</sup> В. Н. Жарков, В. П. Трубицын, Л. В.  
Джосоненко, Физика Земли и планет. Фигуры и внутреннее строение, «Наука», 1971.  
<sup>6</sup> К. Арнольд, Методы спутниковой геодезии, М., «Недра», 1973. <sup>7</sup> Е. М. Gaposchkin,  
E. Lambeck, J. Geophys. Res., v. 76, № 20, 4855 (1971). <sup>8</sup> М. А. Кан, В сб.: Земная  
кора и верхняя мантия, М., «Мир», 1972, стр. 250. <sup>9</sup> У. Каула, Спутниковая геоде-  
зия, М., «Мир», 1970. <sup>10</sup> В. Ф. Проскурин, Н. Г. Кочина, В сб.: Проблемы движения  
искусственных небесных тел, М., «Наука», 1966, стр. 141. <sup>11</sup> А. С. Монин, Враще-  
ние Земли и климат, Л., Гидрометеониздат, 1972.