

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

С. Г. КАЛЬНЕЙ

РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ ПО ПОЛИНОМАМ ЯКОБИ В МЕТРИКЕ L

(Представлено академиком С. М. Никольским 17 I 1974)

1. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$ — полиномы Якоби, нормированные условием

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{k+\alpha}{k}, \quad k=0, 1, \dots \quad (1)$$

Знаком $\sim$ будем обозначать величины одного порядка. Таким образом определенные полиномы Якоби обладают свойствами:

$$\int_{-1}^1 P_k^{(\alpha, \beta)}(x) P_l^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ h_k^{(\alpha, \beta)}, & k = l, \end{cases} \quad (2)$$

где $h_k^{(\alpha, \beta)} \sim (k+1)^{-1}$ ((1), стр. 80);

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^k P_k^{(\beta, \alpha)}(-x) \quad ((1), \text{стр. 71}); \quad (3)$$

$$|P_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)| \leq (\sin \theta)^{-\alpha-1/2} \frac{C}{\sqrt{k+1}}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad \alpha \leq -1/2 \quad ((1), \text{стр. 177}); \quad (4)$$

$$|P_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)| \leq C(k+1)^\alpha, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad \alpha \geq -1/2 \quad ((1), \text{стр. 177}); \quad (5)$$

если $\alpha = \beta$, то неравенства (4) и (5) верны для $0 \leq \theta \leq \pi$;

$$\begin{aligned} (1-x) \left(k+1 + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) P_k^{(\alpha+1, \beta)}(x) = \\ = (k+\alpha+1) P_k^{(\alpha, \beta)}(x) - (k+1) P_{k+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \quad ((1), \text{стр. 83}). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть задана нижняя треугольная матрица чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n=0, 1, \dots$, $k=0, 1, \dots$, причем $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n+1$. Для любой функции $f(x) \in C[-1, 1]$ определим ее линейные средние

$$\tau_n(f, x; \Lambda) = \int_{-1}^1 f(t) K_n^{(\alpha, \beta)}(t, x; \Lambda) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt,$$

где

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(t, x; \Lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} \{h_k^{(\alpha, \beta)}\}^{-1} P_k^{(\alpha, \beta)}(x) P_k^{(\alpha, \beta)}(t),$$

$K_n^{(\alpha, \beta)}$ — ядро метода суммирования, определенного матрицей Λ .

Метод суммирования, определяемый матрицей Λ , называется регулярным, если $\tau_n(f, x; \Lambda) \rightrightarrows f(x)$ для всякой функции $f(x) \in C[-1, 1]$. Как из-

вестно, основную роль в вопросе регулярности метода суммирования играет ограниченность норм операторов $\tau_n(f, x; \Lambda)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \|\tau_n\| &= \max_{-1 \leq x \leq 1} \sup_{|f(t)| \leq 1} \left| \int_{-1}^1 f(t) K_n^{(\alpha, \beta)}(t, x; \Lambda) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt \right| = \\ &= \max_{-1 \leq x \leq 1} \int_{-1}^1 |K_n^{(\alpha, \beta)}(t, x; \Lambda)| (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt, \end{aligned} \quad (7)$$

то ограниченность $\|\tau_n\|$ эквивалентна равномерной ограниченности многочленов $K_n^{(\alpha, \beta)}(t, x; \Lambda)$ в метрике L с весом $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta$.

Обозначим

$$\mathcal{L}_n^{(\alpha, \beta)}(x; \Lambda) = \int_{-1}^1 |K_n^{(\alpha, \beta)}(t, x; \Lambda)| (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt.$$

Нашей целью является оценка

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \mathcal{L}_n^{(\alpha, \beta)}(x; \Lambda)$$

снизу и сверху через коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$ или их разности.

2. Л е м м а 1. Пусть $\alpha \geq -1/2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, тогда

$$\left| P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) - \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(1)}{P_{n+2}^{(\alpha, \beta)}(1)} P_{n+2}^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \right| \leq c \frac{\sin^{1/2-\alpha} \theta}{\sqrt{n}}. \quad (8)$$

Доказательство этого неравенства легко получить, используя равенство (6) и неравенство (4).

З а м е ч а н и е 1. Неравенство (8) является обобщением аналогичного неравенства для полиномов Лежандра (см. (1), стр. 180).

З а м е ч а н и е 2. При $\alpha = \beta$ неравенство (8) верно при $0 \leq \theta \leq \pi$.

Л е м м а 2. Пусть $-1/2 < \alpha < 1/2$, $0 \leq \theta \leq \pi$, тогда

$$\begin{aligned} f_n(\cos \theta) &= \\ &= \sqrt{n} \sum_{k=0}^n \left| P_k^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) - \frac{P_k^{(\alpha, \alpha)}(1)}{P_{2n-k+2}^{(\alpha, \alpha)}(1)} P_{2n-k+2}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) \right| (n+1-k)^{-1/2-\alpha} \leq C, \end{aligned}$$

где C не зависит от n и θ .

Доказательство. Очевидно, что $f_n(\cos \theta) = 0$ для $\theta = 0, \pi$. Поэтому далее считаем, что $0 < \theta < \pi$.

Полагая $n+1-k=j$, запишем $f_n(\cos \theta)$ в виде

$$\begin{aligned} f_n(\cos \theta) &= \sqrt{n} \sum_{j=1}^{[n/2]} \left| P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) - \frac{P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(1)}{P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(1)} P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) \right| j^{-1/2-\alpha} + \\ &+ \sqrt{n} \sum_{j=[n/2]+1}^{n+1} \left| P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) - \frac{P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(1)}{P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(1)} P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) \right| j^{-1/2-\alpha} = \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (5) (при $\alpha = \beta$), для второй суммы получим

$$\Sigma_2 \leq c \sqrt{n} \sum_{j=[n/2]+1}^{n+1} \left[(n+1-j)^\alpha + c \frac{(n+1-j)^\alpha}{(n+1+j)^\alpha} (n+1+j)^\alpha \right] j^{-1/2-\alpha} \leq C.$$

Пусть θ зафиксировано и $\sin \theta \geq [n/2]^{-1}$. Подберем натуральное число N так, что $(N+1)^{-1} \leq \sin \theta \leq N^{-1}$. Если же $\sin \theta < [n/2]^{-1}$, то положим $N = [n/2]$. Тогда

$$\Sigma_1 = \sqrt[n]{n} \sum_{j=1}^N \left| P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) - \frac{P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(1)}{P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(1)} P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) \right| j^{-\frac{1}{2}-\alpha} + \\ + \sqrt[n]{n} \sum_{j=N+1}^{[n/2]} \left| P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) - \frac{P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(1)}{P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(1)} P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) \right| j^{-\frac{1}{2}-\alpha} = \Sigma_{11} + \Sigma_{12}.$$

Используя неравенство (8), нетрудно получить, что

$$\left| P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) - \frac{P_{n+1-j}^{(\alpha, \alpha)}(1)}{P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(1)} P_{n+1+j}^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) \right| \leq c j \frac{\sin^{\frac{1}{2}-\alpha} \theta}{\sqrt[n]{n+1-j}}.$$

Следовательно $(\alpha < 1/2)$,

$$\Sigma_{11} \leq c \sin^{\frac{1}{2}-\alpha} \theta \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1-[n/2]}} \sum_{j=1}^N j^{-\frac{1}{2}-\alpha} \leq c (N \sin \theta)^{\frac{1}{2}-\alpha} \leq c,$$

так как $N \sin \theta \leq 1$.

Применяя неравенство (4) и учитывая, что $(N+1) \sin \theta \geq 1$ (в силу выбора числа N), получим, что $\Sigma_{12} \leq c [(N+1) \sin \theta]^{-\alpha-1/2} \leq c$. Лемма доказана.

Так как $P_k^{(\alpha, \alpha)}(1) \sim k^\alpha$, то, используя лемму 2, равенства (7) и (2), легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $-1/2 < \alpha < 1/2$, тогда для любого $n=1, 2, \dots$

$$\|\tau_n\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} \mathcal{L}_n^{(\alpha, \alpha)}(x; \Lambda) \geq c \sqrt[n]{n} \sum_{k=0}^n |\lambda_k^{(n)}| k^\alpha (n+1-k)^{-\frac{1}{2}-\alpha}. \quad (9)$$

Следствие 1. Для того чтобы метод суммирования ряда Фурье по полиномам Якоби $P_k^{(\alpha, \alpha)}(x)$, $-1/2 < \alpha < 1/2$, был регулярным, необходимо, чтобы $|\lambda_n^{(n)}| \leq c n^{-\alpha-1/2}$.

Полученное следствие служит удобным необходимым признаком регулярности метода суммирования. Например, из следствия выводим, что методы Чезаро (C, β) нерегулярны при $\beta < \alpha + 1/2$. Из (9) получим, что метод Чезаро (C, β) нерегулярен и при $\beta = \alpha + 1/2$, так как правая часть (9) в этом случае равна $c \ln n$. Другим методом этот результат получен Г. Сёге (см. (1), стр. 254).

Замечание 1. Из (8) для ядра Дирихле по полиномам Якоби находим, что

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \mathcal{L}_n^{(\alpha, \alpha)}(x) = \max_{-1 \leq x \leq 1} \int_{-1}^1 |\mathcal{D}_n^{(\alpha, \alpha)}(t, x)| (1-t^2)^\alpha dt \geq c n^{\alpha+1/2}.$$

Известно (см. (2)), что $\max_{-1 \leq x \leq 1} \mathcal{L}_n^{(\alpha, \alpha)}(x) \sim n^{\alpha+1/2}$. Поэтому неравенство (9) неулучшаемо в данных терминах.

3. В этом пункте мы приведем несколько оценок сверху в случае полиномов Лежандра $(\alpha = \beta = 0)$ $P_n(x) \equiv P_n^{(0,0)}(x)$ для функции $\mathcal{L}_n(x; \Lambda) \equiv \mathcal{L}_n^{(0,0)}(x; \Lambda)$.

Лемма 3. Функция $\mathcal{L}_n(x; \Lambda)$ достигает максимума при $x=1$.

Теорема 2. При любом $n=1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_n(1; \Lambda) \leq c \left(\ln n \sum_{k=0}^n |\Delta \lambda_k^{(n)}|^2 (k+1) \right)^{1/2} + c \max_{0 \leq k \leq n} |\lambda_k^{(n)}|. \quad (10)$$

Замечание 2. Б. П. Осиленкер⁽³⁾ изучал линейные методы суммирования разложений функций по некоторым ортонормированным системам. В частности, в случае полиномов Лежандра из его работы вытекает оценка

$$\mathcal{L}_n(x; \Lambda) \leq c + c \left(n \sum_{k=0}^n |\Delta \lambda_k^{(n)}|^2 \right)^{1/2}$$

для $x \in [c, d] \subset (-1, 1)$ с постоянной c , зависящей от $[c, d]$. В связи с этим отметим, что $\ln n$ в правой части (10) убрать нельзя, ибо для метода Чезаро $(C, 1/2)$ из (9) находим, что $\mathcal{L}_n(1; \Lambda) \geq c \ln n$, а из (10) получаем, что $\mathcal{L}_n(1; \Lambda) \leq c \ln n$.

Пусть

$$V_{n,k}(t, 1) = \frac{1}{k+1} \sum_{m=n-k}^n \mathcal{D}_m(t, 1), \quad k=0, 1, \dots, n,$$

суммы Валле — Пуссена, где

$$\mathcal{D}_m(t, x) = \sum_{l=0}^m \{h_m^{(0,0)}\}^{-1} P_l(x) P_l(t).$$

Лемма 4. При любых k и n

$$\int_{-1}^1 |V_{n,k}(t, 1)| dt \sim \sqrt{\frac{n+1}{k+1}}.$$

Следствие. Ядра $F_n(t, 1) = V_{n,n}(t, 1)$ равномерно ограничены в метрике L .

Теорема 3. При любом $n=1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_n(1; \Lambda) \leq c \max_{0 \leq k \leq n} |\lambda_k^{(n)}| + c \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1) \sqrt{n-k}}{\sqrt{n+1}} |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}|.$$

Из этой теоремы вытекает регулярность методов Чезаро (C, β) при $\beta > 1/2$, средних Зигмунда $\lambda_k^{(n)} = 1 - (k/(n+1))^\gamma$ при $\gamma > 0$.

Если последовательность чисел $\lambda_k^{(n)}$ выпукла (вогнута), то имеет место теорема, аналогичная теореме С. М. Никольского для тригонометрического случая⁽⁴⁾:

Теорема 4. Если $\Delta^2 \lambda_k^{(n)} \geq 0 (\leq 0)$, $k=0, 1, \dots, n-1$, $|\lambda_k^{(n)}| \leq c$, то

$$\mathcal{L}_n(1; \Lambda) \sim \sqrt{n} \sum_{k=0}^n |\lambda_k^{(n)}| (n+1-k)^{-3/2}.$$

Автор выражает глубокую благодарность проф. Я. С. Бугрову за постановку задачи и внимание к этой работе.

Московский институт
электронной техники

Поступило
13 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Сёге, Ортогональные многочлены, М., 1962. ² С. А. Агаханов, Г. И. Натансон, Вестн. Ленингр. ун-ва, № 1, 15 (1968). ³ Б. П. Осиленкер, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, 756 (1968). ⁴ С. М. Никольский, Там же, т. 12, 259 (1948).