

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

М. И. КАНОВИЧ

## КОНСТРУКЦИЯ ДЕККЕРА И ЭФФЕКТИВНАЯ НЕРЕКУРСИВНОСТЬ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 30 XII 1974)

1. Для доказательства существования гиперпростых множеств Дж. Деккером была предложена следующая конструкция <sup>(1)</sup>.

Пусть  $f$  — общерекурсивный пересчет рекурсивно-перечислимому множеству  $A^*$ . Натуральное число  $x$  назовем минимальным относительно функции  $f$ , если

$$\forall y (y > x \Rightarrow f(y) > f(x)).$$

Обозначим символом  $D_f$  множество всех натуральных чисел, не являющихся минимальными относительно функции  $f$ .

Деккер показал <sup>(1)</sup>, что если общерекурсивная функция  $f$  — бесповторный \*\* пересчет нерекурсивного множества  $A$ , то множество  $D_f$  гиперпросто и таблично сводится к множеству  $A$ , а множество  $A$  сводится по Тьюрингу к  $D_f$ . Нетрудно показать, что множество  $D_f$  обладает ретрассируемым дополнением. Ейтс в некотором смысле обосновал универсальность описанной конструкции Деккера, показав, что всякое рекурсивно-перечислимое множество с ретрассируемым дополнением можно представить в виде  $D_f$ , выбирая подходящую общерекурсивную функцию  $f$  (см. <sup>(2)</sup>, упр. 9–44 (vii)).

В данной заметке мы покажем, как влияет сложность ограниченного разрешения множества  $A$  на сложность ограниченного разрешения его «деккерова образа»  $D_f$ .

Мы будем использовать терминологию книг <sup>(2, 3)</sup>, а также терминологию и понятия работ <sup>(4–7)</sup>.

2. Будем говорить, что сложность разрешения множества  $\mathcal{M}$  почти ограничена, если для всякой неограниченной неубывающей общерекурсивной функции  $g$  можно указать такое число  $m$  \*\*\*, что для любого натурального числа  $n$ , не меньшего, чем  $m$ , квазиосуществим  $(\mathcal{M}, n)$ - разрешающий алгоритм сложности не выше, чем  $g(n)$ .

Конструкция Деккера сохраняет почти-ограниченность сложности разрешения.

**Теорема 1.** Если общерекурсивная функция  $f$  является бесповторным пересчетом множества  $A$ , сложность разрешения которого почти ограничена, то и сложность разрешения множества  $D_f$  почти ограничена.

Тем не менее оказывается, что сложность разрешения  $D_f$  почти ограничена и в том случае, когда сложность разрешения исходного множества  $A$  «существенно не ограничена».

Множество натуральных чисел называется эффективно нерекурсивным, если осуществима неограниченная общерекурсивная нижняя оценка сложности его разрешения (см. <sup>(4–6)</sup>).

Заметим, что рекурсивно-перечислимое множество эффективно нерекурсивно тогда и только тогда, когда его дополнение почти продуктивно

\* Т. е.  $\forall x (x \in A \Rightarrow \exists n (x = f(n)))$ .

\*\* Т. е.  $\forall n m (f(n) \neq f(m))$ .

\*\*\* Т. е. осуществим алгоритм, перерабатывающий гёделев номер всякой неограниченной неубывающей общерекурсивной функции  $g$  в соответствующее число  $m$ .

(см. <sup>(4)</sup>), теорема 2), и тогда и только тогда, когда оно универсально относительно слабой табличной сводимости \* (см. <sup>(5)</sup>), теорема 1).

**Теорема 2.** *Если общерекурсивная функция  $f$  является пересчетом эффективно нерекурсивного множества  $A$ , то сложность разрешения множества  $D_f$  почти ограничена.*

Можно указать множество  $A$ , сложность разрешения «деккерова образа»  $D_f$  которого не является почти ограниченной, а в «бесконечно многих» точках почти совпадает с заданной неограниченной неубывающей общерекурсивной функцией  $h$ . Согласно теоремам 1 и 2, такие множества  $A$  должны занимать «промежуточное по сложности» положение между эффективно нерекурсивными множествами и множествами с почти ограниченной сложностью разрешения.

**Теорема 3.** *Для любой неограниченной неубывающей общерекурсивной функции  $h$  такой, что*

$$\forall n \ (h(n) \leq \log_2(n+1)),$$

*можно построить такое рекурсивно-перечислимое множество  $A$  и такой его бесповторный общерекурсивный пересчет  $f$ , что:*

1) *функция  $h$  является верхней оценкой сложности разрешения множества  $D_f$  \*\*,*

2) *для некоторого положительного рационального числа  $C$  существует неограниченное  $D_f$ -рекурсивное множество натуральных чисел  $n$  таких, что сложность любого  $(D_f, n)$ -разрешающего алгоритма больше, чем  $Ch(n)$ .*

**З а м е ч а н и е.** Согласно теореме 4 статьи <sup>(8)</sup> множество  $D_f$ , удовлетворяющее условию 2) теоремы 3, и, следовательно, множество  $A$  являются универсальными относительно сводимости по Тьюрингу.

Отметим, что можно эффективно ограничить нижние оценки сложности разрешения множеств с почти ограниченной сложностью разрешения.

**Теорема 4.** *Сложность разрешения множества  $D$  почти ограничена тогда и только тогда, когда осуществим алгоритм, перерабатывающий гёделев номер всякой общерекурсивной нижней оценки  $h$  сложности разрешения множества  $D$  в такое число  $m$ , что*

$$\forall n \ (h(n) \leq m).$$

3. Шмудьян <sup>(9)</sup> показал, что если общерекурсивная функция  $f$  — бесповторный пересчет креативного множества  $A$ , то множество  $D_f$  обладает «ярко» выраженной простотой: множество  $D_f$  эффективно просто. Имеет место более сильная теорема.

Алгоритм  $\mathcal{A}$  назовем  $D$ -неплотной последовательностью, если:

1) *всякое натуральное число, к которому применим  $\mathcal{A}$ , перерабатывается алгоритмом  $\mathcal{A}$  в список натуральных чисел, пересечение которого с дополнением множества  $D$  не пусто,*

2) *каковы бы ни были натуральные числа  $m$  и  $n$ , к которым применим алгоритм  $\mathcal{A}$ , списки  $\mathcal{A}(m)$  и  $\mathcal{A}(n)$  не имеют общих элементов.*

Гиперпростое множество  $D$  назовем эффективно гиперпростым, если для всякой  $D$ -неплотной последовательности  $\mathcal{A}$  можно указать такое число  $t$ , что алгоритм  $\mathcal{A}$  применим не более чем к  $t$  различным натуральным числам (т. е. последовательность  $\mathcal{A}$  «состоит» из не более чем  $t$  списков).

**Теорема 5.** *Если общерекурсивная функция  $f$  является перерасчетом эффективно нерекурсивного множества  $A$ , то множество  $D_f$  эффективно гиперпросто.*

\* Т. е.  $w$ -полно в терминологии <sup>(2)</sup>.

\*\* Т. е. для всякого натурального числа  $n$  квазисуществим  $(D_f, n)$ -разрешающий алгоритм сложности не выше, чем  $h(n)$ .

Предлагаемое определение эффективно гиперпростого множества является естественным аналогом определения эффективно простого множества.

Теорема 6. а) *Всякое эффективно гиперпростое множество эффективно просто.*

б) *Можно построить гиперпростое множество, являющееся эффективно простым, но не являющееся эффективно гиперпростым.*

в) *Рекурсивно перечислимое множество эффективно гиперпросто тогда и только тогда, когда оно эффективно гиперпросто в смысле статьи <sup>(10)</sup>.*

Автор глубоко благодарен член-корр. АН СССР А. А. Маркову за внимание и советы в период работы над статьей.

Калининский государственный  
университет

Поступило  
30 XII 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> J. C. E. Dekker, Proc. Am. Math. Soc., v. 5, 791 (1954). <sup>2</sup> X. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972. <sup>3</sup> А. А. Марков, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 42 (1954). <sup>4</sup> М. И. Канович, ДАН, т. 186, № 5, 1008 (1969). <sup>5</sup> М. И. Канович, ДАН, т. 190, № 1, 23 (1970). <sup>6</sup> М. И. Канович, ДАН, т. 192, № 4, 721 (1970). <sup>7</sup> М. И. Канович, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 16, 77 (1969). <sup>8</sup> М. И. Канович, ДАН, т. 194, № 3, 500 (1970). <sup>9</sup> R. M. Smullyan, Proc. Am. Math. Soc., v. 15, 393 (1964). <sup>10</sup> М. М. Арсланов, Алгебра и логика, т. 8, № 2, 143 (1969).